

算法点竄手引草における Malfatti問題の解法

大村一秀の手法と Maxima によるアプローチ

高遠節夫・西浦孝治

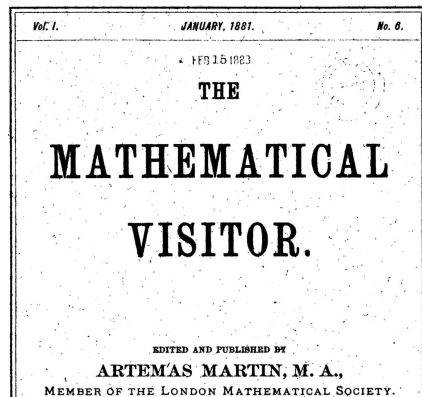
KeTCindy センター
日本数学教育学会名誉会員 ・ 福島高専

2026.09.11

Malfatti 円

概略史 (本講演関連に限定)

- (1) Malfatti 1803
- (2) 安島直円・不朽算法
1773 以前
- (3) 藤田貞資・精要算法
1781
- (4) 大村一秀
算法点竄手引草
1841
- (5) 明星輪寺算額 1865
- (6) The Mathematical Visitor, 1, pp.188-191, 1881
Edmunds, Knisely, Seitz
- (7) Maxima と mnR 法による解法 2025-



精要算法 (藤田) の解

(1) 置中徑乗小徑平方開之名天

$$\text{天} = \sqrt{2r_2 \times 2r_3} = 2\sqrt{r_2 r_3}$$

(2) 置併大中小徑乗大徑平方開之名地

$$\text{地} = \sqrt{(2r_1 + 2r_2 + 2r_3) \times 2r_1} = 2\sqrt{r_1(r_1 + r_2 + r_3)}$$

(3) 置大徑乗天以地減大徑余除之得全徑合問

$$2r = \frac{2r_1 \times \text{天}}{\text{地} - 2r_1}$$

(4) (3) の天と地に (1)(2) を代入して整理

$$2r = \frac{2r_1 \times 2\sqrt{r_2 r_3}}{2\sqrt{r_1(r_1 + r_2 + r_3)} - 2r_1} = \frac{2r_1 \sqrt{r_2 r_3}}{\sqrt{r_1(r_1 + r_2 + r_3)} - r_1}$$

$$\cdot 2r = \frac{2\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1 + r_2 + r_3} - \sqrt{r_1}} \text{ と変形できる}$$

算法点竄手引草 (大村) の導出

(1) 変数の定義 (置き換えによる簡略化)

$$\text{子} = \sqrt{D_l \cdot D_s}, \text{丑} = \sqrt{D_m \cdot D_s} \quad (D_l, D_m, D_s \text{ は 3 円の直径})$$

$$\text{子丑和} = \text{卯}(, \text{辰}, \text{巳})$$

(2) 関係式の構築 (方程式のセットアップ)

「直積左ニ書ク」「直積ヲ消シ是ヲ解ク」展開, 共通項消去して解く

(3) 消去 (点竄) と術文の導出

「中径ヲ乗小径ヲ乗ケ平方ニ開キ麟ト名ツク」

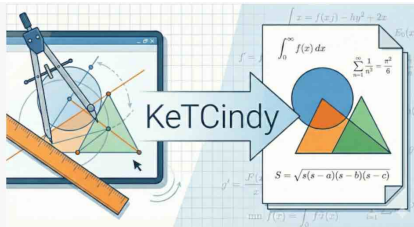
$$\text{麟} = \sqrt{D_m \cdot D_s}, \text{鳳} = \sqrt{(D_l + D_m + D_s) \cdot D_l}$$

$$D = \frac{\text{麟} \cdot D_l}{\text{鳳} - D_l}$$

KeTCindy による解法

KETCindy とは

- 動的幾何 Cinderella の
- T_EX の描画ファイルを
 - (1) Cinderella でソ
 - (2) ボタンを押すと b
 - (3) Maxima(数式処
- K_ET_Cindy の配布
 - ・ "ketcindy home"で
 - ・ TeXLive のサブセ
 - ・ 沼津高専や木更津高
 - 成してくれた



KeTCindy Home

KeTCindy Center

2026-08-19

最新ニュース

- 2026-08-19 KeTCindy が更新されました (version 4.5.56)
 - ketslideがlualatex対応になりました。
 - KeTCindyのインストールを参考にしてください。
 - 必須環境: TeX (KeTeX, TeXLive) と R
 - Windowsの場合: Sumatra PDFも必要です。
 - 重要: インストール実行時に「すべてのユーザに対してインストール」を選択してください。 (インストール先が C:\Program Files\SumatraPDF になります)
- 2026-06-12 Cinderella が更新されました (build2136)
 - Cinderellaのインストールを参考にしてください。
 - 検索時は beta cinderella としてください。
- 2026-05-19 KeTeX が TeXLive20260313 に更新されました
 - 「kettex」または「kettex release」で検索可能です。
 - KeTeXのインストール / エディタ設定(TeXWorks等)
- Windows用 一括インストーラ (沼津高専 学生作成)
 - Cinderella, R, Sumatra, KeTeX, KeTCindy が一括でインストールされます。

和算の幾何と Maxima による解法

- 和算の幾何の問題は面白い教材である
 - ・ 自ら解くことで興味と関心をより高めるだろう
- まともに解くには洞察力とかなりの計算力を要する
- 数式処理を用いると高校レベルの幾何の知識で十分
 - ・ Maxima はフリーだが高度な計算力・情報も多い
- 数式処理を用いても、簡単に解けない場合が多い
 - ・ 無理式が出ると、多くの場合に計算が破綻する
- そこで、 $m = \tan \frac{B}{2}$, $n = \tan \frac{C}{2}$ と内接円の半径 r で三角形の諸量を表す方法 (mnr 法) を考案した

mnr 法

- $m = \tan \frac{B}{2}, n = \tan \frac{C}{2}$

r = 内接円の半径

$$\angle B = (m), \angle C = (n)$$

- 三角形の諸量の表現 (有理式)

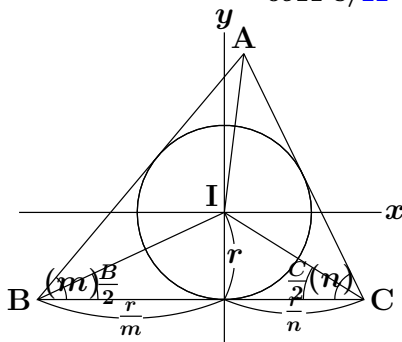
$$\text{vtxL}:(-\frac{r}{m}, -r), \text{vtxR}:(\frac{r}{n}, -r), \text{vtxT}:(\frac{r(n-m)}{1-mn}, \frac{1+mn}{1-mn})$$

$$\text{edgB}:\frac{r}{m} + \frac{r}{n}, \text{edgL}=\frac{r(1+m^2)}{m(1-mn)}, \text{edgR}:\frac{r(1+n^2)}{n(1-mn)}$$

内接円 inC, inR, 外接円 cirC, cirR

傍接円 exCa, exRa, exCb, exRb, exCc, exRc

- mnr 法の Maxima ライブラリ mnr.max を作成



mnr 法の主コマンド

● 基本コマンド

putT(m,n,r) 内心を原点にして三角形をおく

slideT(p1,p2) p1 が p2 に一致するように平行移動

rotateT(m,p) p の周りに $(m) = 2 \tan^{-1}(m)$ 回転

● 式変形の主なコマンド

numerf(f),denomf(f) 分子分母を因数分解

frfactor(f) 分数を簡単化

frev(eq,rep) eq に rep を代入して簡単化

radcan(s) 無理式の簡単化 (Maxima)

図形のための主なコマンド

- 角の変換

`supA(m),comA(m)` 補角と余角

`plusA(m1,m2),minusA(m1,m2)` 角の和と差

`timesA(nn,m)` 角の整数倍

- その他

`dotProd(v1,v2),crossProd(v1,v2)` 内積と外積

`lenSeg2(p1,p2)` 距離の平方

`meetLine(pts1,pts2)` 交点

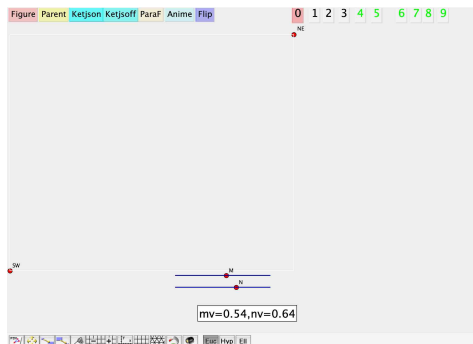
`comTan1,comTan1C` 共通外接線, 共通内接線

KeTCindy による求解 1

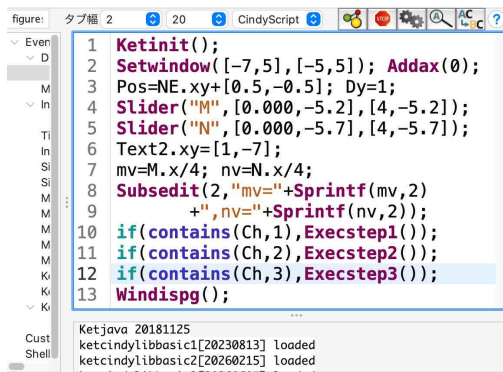
(1) Cinderella(cdy) ファイルと mkcmd ファイルを準備

例えば malfattiin.cdy, malfattiinmkcmd.txt

(2) cdy は雛形ファイルを用いる (mkcmd.txt を import)



malfattiin.cdy のスクリーン



figures スロット

KeTCindy による求解 2

(3) mkcmd の記述 2

```

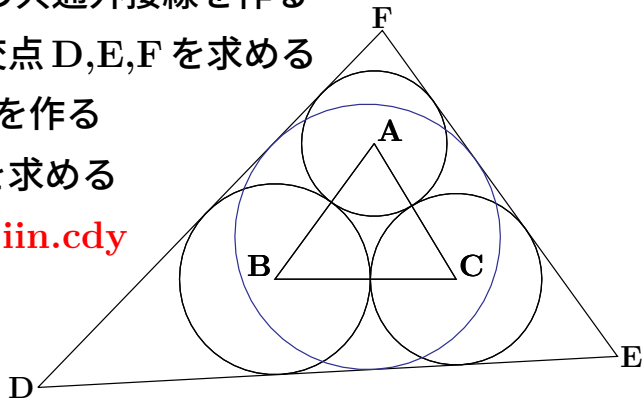
Disptex(Pos,Dy,"ABCをおく",opsb);↓
Disptex([Pos_1+0.5,Pos_2],Dy*0.9,"A::B::C",opsf);↓
Disptex([Pos_1-0.5,Pos_2],Dy,"3円が接する連立方程式",opsb);↓
Disptex([Pos_1+0.5,Pos_2],Dy*0.9,"eq1::eq2::eq3",opsf);↓
Disptex([Pos_1-0.5,Pos_2],Dy,"連立方程式の解",opsb);↓
Disptex([Pos_1+0.5,Pos_2],Dy*0.9,"sol",opsf);↓
Disptex([Pos_1-0.5,Pos_2],Dy,"3円の半径",opsb);↓
Disptex([Pos_1+0.5,Pos_2],Dy*0.9,"r1::r2::r3",opsf);↓
);↓
Dispfig1():=(↓
  Assignvalue();↓
  Parsevv("A::B::C");↓
  Listplot("1",[A,B,C,A],["do"]);↓
  Circledata("1a",[A,r1]);Circledata("1b",[B,r2]);↓
  Circledata("1c",[C,r3]);↓
  Letter([A,"ne","A",B,"nw","B",C,"ne","C"]);↓
);↓

```

中からの解法 (方針)

- (1) $\text{putT}(m,n,r)$ で ABC をおく
- (2) 中心が A,B,C で互いに接する 3 円 C_1, C_2, C_3 を作る
- (3) comTan で円の共通外接線を作る
- (4) 共通外接線の交点 D,E,F を求める
- (5) DEF の内接円を作る
- (6) 内接円の半径を求める

デモ [malfattiin.cdy](#)



中からの解法 (結果)

マウスをドラッグして自由要素を動かす

Figure Parent Ketjson Ketjsoff ParaF Anime Flip

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

NE

m, n, r, iR を r_1, r_2, r_3 で表す

$$\text{sol:} \left[m = \sqrt{\frac{r_1 r_3}{r_2 r_3 + r_2^2 + r_1 r_2}}, n = r_1 / ((r_3 + r_2 + r_1) \sqrt{\frac{r_1 r_3}{r_2 r_3 + r_2^2 + r_1 r_2}}), r = \frac{r_1 r_3}{(r_3 + r_2 + r_1) \sqrt{\frac{r_1 r_3}{r_2 r_3 + r_2^2 + r_1 r_2}}} \right]$$

$$m: \frac{\sqrt{r_1} \sqrt{r_3}}{\sqrt{r_2} \sqrt{r_3 + r_2 + r_1}}$$

$$n: \frac{\sqrt{r_1} \sqrt{r_2}}{\sqrt{r_3} \sqrt{r_3 + r_2 + r_1}}$$

$$r: (\sqrt{r_1} \sqrt{r_2} \sqrt{r_3}) / \sqrt{r_3 + r_2 + r_1}$$

$$iR: \sqrt{2}((2r_1 r_2^2 + 4r_1^2 r_2 + 2r_1^3) r_3^6 + (7r_1 r_2^3 + 12r_1^2 r_2^2 + 3r_1^3 r_2 - 2r_1^4) r_3^5 + (7r_1^2 r_2^3 + 12r_1^3 r_2^2 + 3r_1^4 r_2 - 2r_1^5) r_3^4 + \dots)$$

$t_1 = \sqrt{r_1}, t_2 = \sqrt{r_2}, t_3 = \sqrt{r_3}$ と置き換え

$$iRs: \frac{t_1 t_2 t_3^3 + \sqrt{t_3^2 + t_2^2 + t_1^2} (t_1 t_2 t_3^2 + t_1 t_2^2 t_3) + t_1^2 t_2 t_3^2 + (t_1 t_2^3 + t_1^2 t_2^2) t_3}{t_2 t_3 \sqrt{t_3^2 + t_2^2 + t_1^2} + t_1 t_3^2 + t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2^2}$$

$$iRs2: \frac{t_1 t_2 t_3 (t_3^2 + t_1 t_3 + t_3 + t_2^2 + t_1 t_2 + t_2)}{t_1 t_3^2 + t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2^2}$$

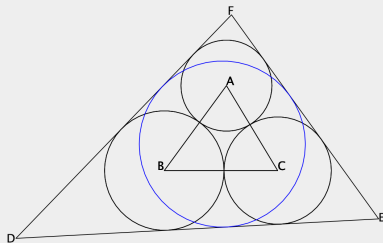
$t = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}$ とおき分子を有理化する

$$niR: t_1 t_2 t_3^3 + t_1^2 t_2 t_3^2 + t_1 t_2 t_3^2 + t_1 t_2^3 t_3 + t_1^2 t_2^2 t_3 + t_1 t_2^2 t_3$$

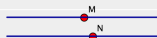
$$niR2: -(2t_1^2 t_2^2 t_3^2 (t_2 t_3 - t_1 t_3 - t_1 t_2) (t_3^2 + t_2^2))$$

$$diR2: -(t_1 t_2 t_3 (t_3 + t_2 + t_1 - t) (t_2 t_3 - t_1 t_3 - t_1 t_2) (t_3^2 + t_2^2))$$

$$iR2: \frac{2t_1 t_2 t_3}{t_3 + t_2 + t_1 - t}$$



SW



$$mv=0.51, nv=0.56$$

中からの解法 (考察)

- $$r = \frac{2\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} - \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}$$

- 精要算法 1781 の解とは違う

$$2r = \frac{2r_1 \times 2\sqrt{r_2 r_3}}{2\sqrt{r_1(r_1+r_2+r_3)} - 2r_1} = \frac{2r_1\sqrt{r_2 r_3}}{\sqrt{r_1(r_1+r_2+r_3)} - r_1}$$

- 算法点竄手引草 1841 の解とも違う
- 誤りが初期に知られていたか、論争があったのか、後世に修正されたかは不明
- 明星輪寺算額 (1865) では正しい式が掲載
- 深川英俊, Sacred Mathematics(2008) も正しい式

明星輪寺算額 (1865)

● 訳

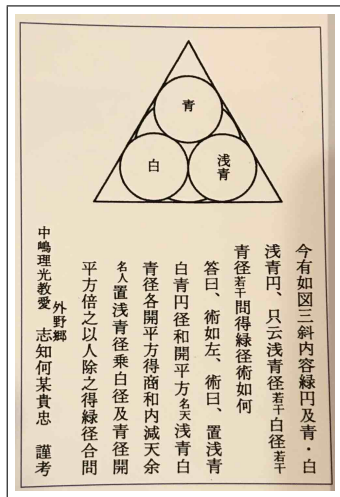
問 図のように三角形の中に緑円(内接円) 青, 白, 浅青の3つの円が入っている. 浅青円, 白円, 青円の直径がそれぞれ与えられているとき, 緑円の直径を求める計算法は如何になるか

答 浅青, 白, 青の各円の直径の和の平方根を求め, これを「天」とする. 浅青, 白, 青の各円の直径の平方根の和から, 「天」を引いた余りを「人」とする. 浅青, 白, 青の各円の直径を掛け合わせて平方根を求め, それを2倍したものを「人」で割ることで, 緑円の直径が得られる

● 3円と内接円の直径を d_1, d_2, d_3, D とする

$$\text{天} = \sqrt{d_1 + d_2 + d_3}, \quad \text{人} = \sqrt{d_1} + \sqrt{d_2} + \sqrt{d_3} - \text{天}$$

$$D = \frac{2\sqrt{d_1 d_2 d_3}}{\text{人}} = \frac{2\sqrt{d_1 d_2 d_3}}{\sqrt{d_1} + \sqrt{d_2} + \sqrt{d_3} - \sqrt{d_1 + d_2 + d_3}}$$

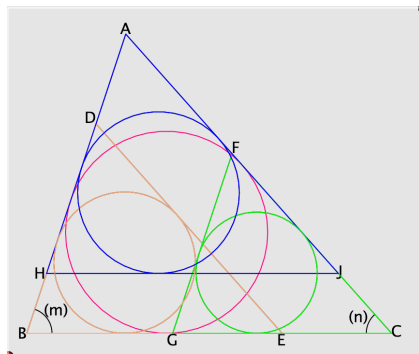


金生山ライブラリー 1

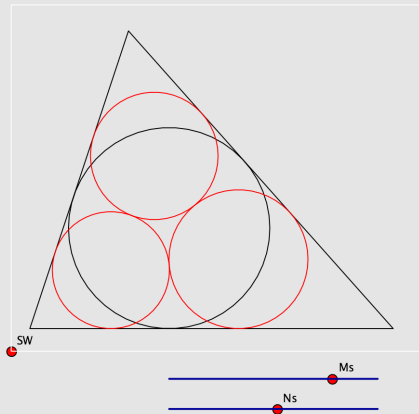
外からの解法 (方針)

- (1) putT(m,n,r) で ABC をおき, 内接円の半径を r とする
- (2) ABC と相似な AHJ, DBE, FGC の内接円 C_1, C_2, C_3 の半径を r_1, r_2, r_3 とする
- (3) C_1, C_2, C_3 の外接条件からできる連立方程式を解く

デモ malfattiout.cdy



外からの解法 (結果)



$$m=0.72, n=0.45$$

NE

和算家の解答を導く

$$r1: \frac{(N+1)(MN-1)r}{(M+1)(MN-N-M-1)}$$

$$r2: \frac{(M+1)(MN-1)r}{(N+1)(MN-N-M-1)}$$

$$r3: \frac{(M+1)(N+1)(MN-N-M-1)r}{4(MN-1)}$$

置き換え $t_1 = \sqrt{s_1}, t_2 = \sqrt{s_2}, t_3 = \sqrt{s_3},$

$$\text{sol3:} [[M=(2t_1t_2t_3-r)/r, N=(2t_1t_3-r)/r]]$$

$$\text{eq5: } t_1(2t_1^2t_2^2t_3^2 - 2rt_1t_2t_3^2 - 2rt_1t_2^2t_3 - 2rt_1^2t_2t_3 + r^2t_2t_3 +$$

$$\text{sol5: } [r = - \frac{t_1t_2t_3 \sqrt{t_3^2+t_2^2+t_1^2} - t_1t_2t_3^2 + (-(t_1t_2^2) - t_1^2t_2)t_3}{(t_2+t_1)t_3+t_1t_2}]$$

$$\text{sol: } r = \frac{t_1t_2t_3 \sqrt{t_3^2+t_2^2+t_1^2} + t_1t_2t_3^2 + (t_1t_2^2+t_1^2t_2)t_3}{(t_2+t_1)t_3+t_1t_2}$$

$$r: \frac{t_1t_2t_3(\sqrt{t_3^2+t_2^2+t_1^2}+t_3+t_2+t_1)}{t_2t_3+t_1t_3+t_1t_2}$$

外からの解法 (考察)

- 明星輪寺の解と一致する

$$r: \frac{t_1 t_2 t_3 (\sqrt{t_3^2 + t_2^2 + t_1^2} + t_3 + t_2 + t_1)}{t_2 t_3 + t_1 t_3 + t_1 t_2}$$

- 4 分角が重要な働き

$$r_1: \frac{(N+1)(MN-1)r}{(M+1)(MN-N-M-1)}$$

$$r_2: \frac{(M+1)(MN-1)r}{(N+1)(MN-N-M-1)}$$

$$r_3: \frac{(M+1)(N+1)(MN-N-M-1)r}{4(MN-1)}$$

Seitz(1881) の導出式

Subtracting x times (6) from (8), and y times (7) from (9), we have

$$b[x \tan \frac{1}{2}B + 2\sqrt{(xy)} + y \cot \frac{1}{2}B] = c[x \tan \frac{1}{2}C + 2\sqrt{(xz)} + z \cot \frac{1}{2}C] \dots\dots\dots (10),$$

$$a[x \cot \frac{1}{2}A + 2\sqrt{(xy)} + y \tan \frac{1}{2}A] = c[y \tan \frac{1}{2}C + 2\sqrt{(yz)} + z \cot \frac{1}{2}C] \dots\dots\dots (11).$$

Multiplying (10) by (4), and (11) by (5), and extracting the square root, we have

$$\sqrt{x} \sin \frac{1}{2}B + \sqrt{y} \cos \frac{1}{2}B = \sqrt{x} \sin \frac{1}{2}C + \sqrt{z} \cos \frac{1}{2}C \dots\dots\dots (12),$$

$$\sqrt{x} \cos \frac{1}{2}A + \sqrt{y} \sin \frac{1}{2}A = \sqrt{y} \sin \frac{1}{2}C + \sqrt{z} \cos \frac{1}{2}C \dots\dots\dots (13).$$

Subtracting (13) from (12), we find

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{\sin \frac{1}{2}C + \cos \frac{1}{2}A - \sin \frac{1}{2}B}{\sin \frac{1}{2}C - \sin \frac{1}{2}A + \cos \frac{1}{2}B} = \frac{\cos \frac{1}{2}C + \cos \frac{1}{2}(2B+C)}{\cos \frac{1}{2}C + \cos \frac{1}{2}(2A+C)} = \frac{\cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}(\pi-A)}{\cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}(\pi-B)} = \frac{1 + \tan \frac{1}{2}A}{1 + \tan \frac{1}{2}B} \dots\dots (14).$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{2c \tan \frac{1}{2}A \tan \frac{1}{2}B (1 + \tan \frac{1}{2}B)}{(1 + \tan \frac{1}{2}A)(\tan \frac{1}{2}A + \tan \frac{1}{2}B)(1 - \tan \frac{1}{2}A \tan \frac{1}{2}B)[1 + \tan \frac{1}{2}(A+B)]'} \\ &= \frac{c \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B (1 + \tan \frac{1}{2}B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)(1 + \tan \frac{1}{2}A)[1 + \tan \frac{1}{2}(\pi-C)]'} = \frac{r(1 + \tan \frac{1}{2}B)}{(1 + \tan \frac{1}{2}A)[1 + \tan \frac{1}{2}(\pi-C)]'} \\ &= \frac{\frac{1}{2}r(1 + \tan \frac{1}{2}B)(1 + \tan \frac{1}{2}C)}{1 + \tan \frac{1}{2}A}. \end{aligned}$$

the value of x in (14) and (15), we find

$$y = \frac{\frac{1}{2}r(1 + \tan \frac{1}{2}A)(1 + \tan \frac{1}{2}C)}{1 + \tan \frac{1}{2}B}, \quad \text{and} \quad z = \frac{\frac{1}{2}r(1 + \tan \frac{1}{2}A)(1 + \tan \frac{1}{2}B)}{1 + \tan \frac{1}{2}C}.$$

An excellent solution was furnished by *William Hoover*, and a very brief one by Professor *Casey*. We hope to publish other solutions in a future No.

This celebrated problem has a history, and is known to mathematicians as "Malfatti's Problem."

Seitz の式との同一性

$$r1: \frac{(N+1)(MN-1)r}{(M+1)(MN-N-M-1)}$$

- $L = \tan(A/4)$ とおく

$$\begin{aligned} L &= \tan(\pi/4 - B/4 - C/4) = \frac{1 - \tan(B/4 + C/4)}{1 + \tan(B/4 + C/4)} \\ &= \frac{1 - \frac{M+N}{1-MN}}{1 + \frac{M+N}{1-MN}} = \frac{1 - MN - M - N}{1 - MN + M + N} \end{aligned}$$

$$1 + L = 1 + \frac{1 - MN - M - N}{1 - MN + M + N} = 2 \frac{1 - MN}{1 - MN + M + N}$$

$$\frac{1+L}{2} = \frac{1 - MN}{1 - MN + M + N}$$

$$s1 = \frac{r1}{r} = \frac{(N+1)(MN-1)}{(M+1)(MN-N-M-1)} = \frac{(1+N)(1+L)}{2(1+M)}$$

- したがって

$$s1 = \frac{(1 + \tan C/4)(1 + \tan A/4)}{2(1 + \tan B/4)}$$

$$y = \frac{\frac{1}{2}r(1 + \tan \frac{1}{4}A)(1 + \tan \frac{1}{4}C)}{1 + \tan \frac{1}{4}B}$$

結論

- 今後の課題

- ・ 4分角の導入など，より複雑な算額問題へ対応するための mnr 法の拡張と工夫
- ・ 初学者が確実に対話的求解を行えるためのマニュアルとエラーチェック機能の整備