

算法点竄手引草における Malfatti問題の解法

大村一秀の手法と Maxima によるアプローチ

高遠節夫・西浦孝治

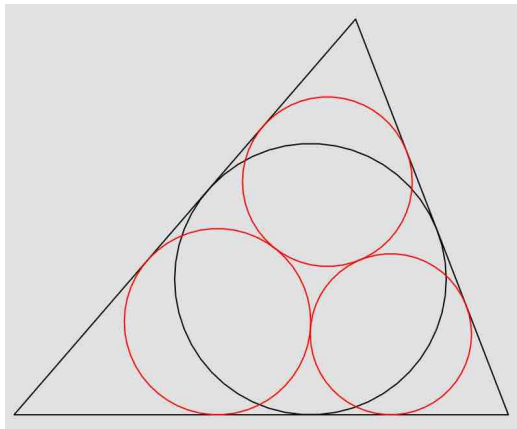
KeTCindy センター
日本数学教育学会名誉会員 ・ 福島高専

2026.09.11

Malfatti 円

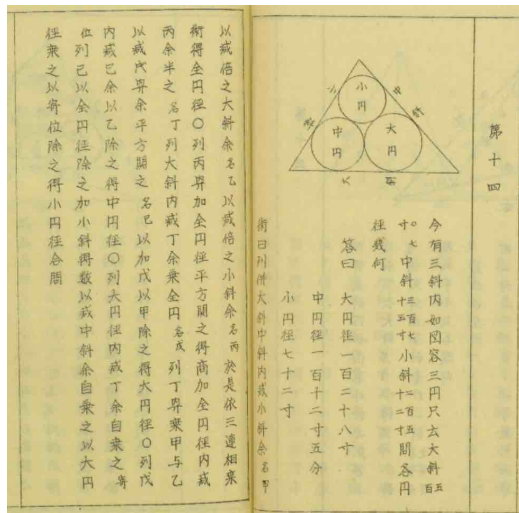
概略史 (本講演関連に限定)

(1) Malfatti 1803



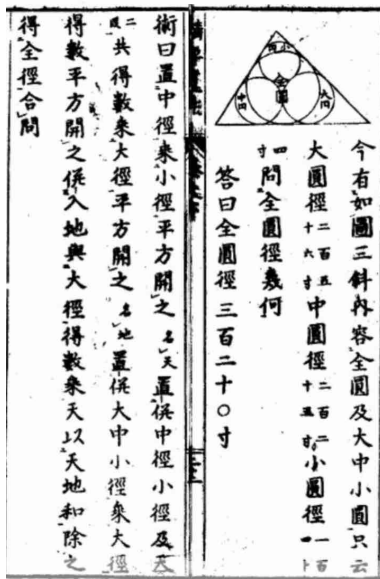
概略史 (本講演関連に限定)

- (1) Malfatti 1803
- (2) 安島直円・不朽算法
1773 以前



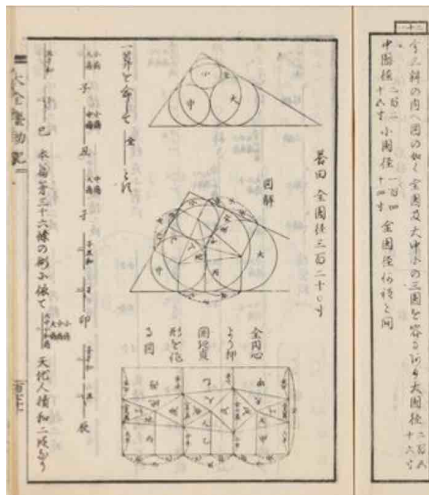
概略史 (本講演関連に限定)

- (1) Malfatti 1803
- (2) 安島直円・不朽算法
1773 以前
- (3) 藤田貞資・精要算法
1781



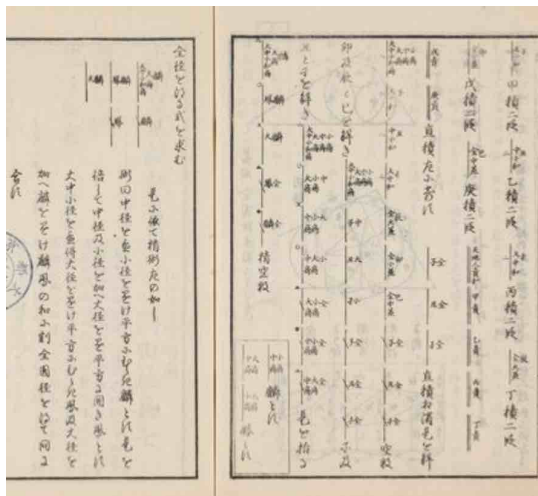
概略史 (本講演関連に限定)

- (1) Malfatti 1803
- (2) 安島直円・不朽算法
1773 以前
- (3) 藤田貞資・精要算法
1781
- (4) 大村一秀
算法点竄手引草 1
1841



概略史 (本講演関連に限定)

- (1) Malfatti 1803
- (2) 安島直円・不朽算法
1773 以前
- (3) 藤田貞資・精要算法
1781
- (4) 大村一秀
算法点竄手引草 2
1841



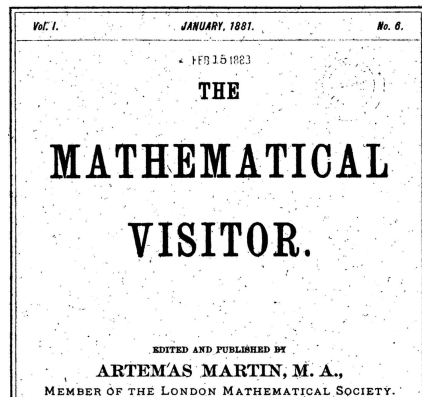
概略史 (本講演関連に限定)

- (1) Malfatti 1803
- (2) 安島直円・不朽算法
1773 以前
- (3) 藤田貞資・精要算法
1781
- (4) 大村一秀
算法点竄手引草
1841
- (5) 明星輪寺算額 1865



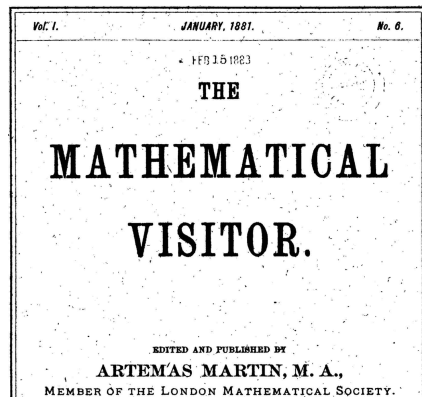
概略史 (本講演関連に限定)

- (1) Malfatti 1803
- (2) 安島直円・不朽算法
1773 以前
- (3) 藤田貞資・精要算法
1781
- (4) 大村一秀
算法点竄手引草
1841
- (5) 明星輪寺算額 1865
- (6) The Mathematical Visitor, 1, pp.188-191, 1881
Edmunds, Knisely, Seitz



概略史 (本講演関連に限定)

- (1) Malfatti 1803
- (2) 安島直円・不朽算法
1773 以前
- (3) 藤田貞資・精要算法
1781
- (4) 大村一秀
算法点竄手引草
1841
- (5) 明星輪寺算額 1865
- (6) The Mathematical Visitor, 1, pp.188-191, 1881
Edmunds, Knisely, Seitz
- (7) Maxima と mnf 法による解法 2025-



精要算法 (藤田) の解

(1) 置中徑乗小徑平方開之名天

$$\text{天} = \sqrt{2r_2 \times 2r_3} = 2\sqrt{r_2 r_3}$$

(2) 置併大中小徑乗大徑平方開之名地

$$\text{地} = \sqrt{(2r_1 + 2r_2 + 2r_3) \times 2r_1} = 2\sqrt{r_1(r_1 + r_2 + r_3)}$$

(3) 置大徑乗天以地減大徑余除之得全徑合問

$$2r = \frac{2r_1 \times \text{天}}{\text{地} - 2r_1}$$

(4) (3) の天と地に (1)(2) を代入して整理

$$2r = \frac{2r_1 \times 2\sqrt{r_2 r_3}}{2\sqrt{r_1(r_1 + r_2 + r_3)} - 2r_1} = \frac{2r_1 \sqrt{r_2 r_3}}{\sqrt{r_1(r_1 + r_2 + r_3)} - r_1}$$

精要算法 (藤田) の解

(1) 置中徑乗小徑平方開之名天

$$\text{天} = \sqrt{2r_2 \times 2r_3} = 2\sqrt{r_2 r_3}$$

(2) 置併大中小徑乗大徑平方開之名地

$$\text{地} = \sqrt{(2r_1 + 2r_2 + 2r_3) \times 2r_1} = 2\sqrt{r_1(r_1 + r_2 + r_3)}$$

(3) 置大徑乗天以地減大徑余除之得全徑合問

$$2r = \frac{2r_1 \times \text{天}}{\text{地} - 2r_1}$$

(4) (3) の天と地に (1)(2) を代入して整理

$$2r = \frac{2r_1 \times 2\sqrt{r_2 r_3}}{2\sqrt{r_1(r_1 + r_2 + r_3)} - 2r_1} = \frac{2r_1 \sqrt{r_2 r_3}}{\sqrt{r_1(r_1 + r_2 + r_3)} - r_1}$$

$$\cdot 2r = \frac{2\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1 + r_2 + r_3} - \sqrt{r_1}} \text{ と変形できる}$$

算法点竄手引草 (大村) の導出

(1) 変数の定義 (置き換えによる簡略化)

子 = $\sqrt{D_l \cdot D_s}$, 丑 = $\sqrt{D_m \cdot D_s}$ (D_l, D_m, D_s は 3 円の直径)

子丑和 = 卯(, 辰, 巳)

(2) 関係式の構築 (方程式のセットアップ)

「直積左ニ書ク」「直積ヲ消シ是ヲ解ク」展開, 共通項消去して解く

(3) 消去 (点竄) と術文の導出

「中径ヲ乗小径ヲ乗ケ平方ニ開キ麟ト名ツク」

麟 = $\sqrt{D_m \cdot D_s}$, 鳳 = $\sqrt{(D_l + D_m + D_s) \cdot D_l}$

算法点竄手引草 (大村) の導出

(1) 変数の定義 (置き換えによる簡略化)

$$\text{子} = \sqrt{D_l \cdot D_s}, \text{丑} = \sqrt{D_m \cdot D_s} \quad (D_l, D_m, D_s \text{ は } 3 \text{ 円の直径})$$

$$\text{子丑和} = \text{卯}(, \text{辰}, \text{巳})$$

(2) 関係式の構築 (方程式のセットアップ)

「直積左ニ書ク」「直積ヲ消シ是ヲ解ク」展開, 共通項消去して解く

(3) 消去 (点竄) と術文の導出

「中径ヲ乗小径ヲ乗ケ平方ニ開キ麟ト名ツク」

$$\text{麟} = \sqrt{D_m \cdot D_s}, \text{鳳} = \sqrt{(D_l + D_m + D_s) \cdot D_l}$$

$$D = \frac{\text{麟} \cdot D_l}{\text{鳳} - D_l}$$

KeTCindy による解法

KETCindy とは

- 動的幾何 Cinderella のマクロパッケージ

K_ET Cindy とは

- 動的幾何 Cinderella のマクロパッケージ
- T_EX の描画ファイルを対話的に作成
 - (1) Cinderella でソース作成
 - (2) ボタンを押すと batch ファイルで T_EX を実行
 - (3) Maxima(数式処理), R, C(曲面) などの呼び出し

KE_ETCindy とは

- 動的幾何 Cinderella のマクロパッケージ
- T_EX の描画ファイルを対話的に作成
 - (1) Cinderella でソース作成
 - (2) ボタンを押すと batch ファイルで T_EX を実行
 - (3) Maxima(数式処理), R, C(曲面) などの呼び出し
- KE_ETCindy の配布
 - ・ "ketcindy home" で検索
 - ・ TeXLive のサブセット版 KeTTeX も配布
 - ・ 沼津高専や木更津高専の学生が一括インストーラを作成してくれた

KETCindy とは

- 動的幾何 Cinderella の
- T_EX の描画ファイルを

(1) Cinderella でソ

(2) ボタンを押すと b

(3) Maxima(数式処

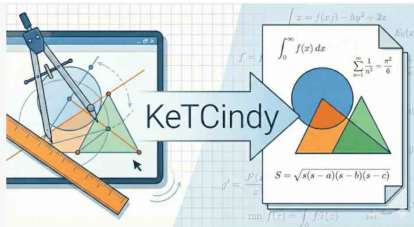
- KETCindy の配布

・ "ketcindy home" で

・ TeXLive のサブセッ

・ 沼津高専や木更津高

成してくれた



KETCindy Home

KETCindy Center

2026-08-19

最新ニュース

- 2026-08-19 KETCindy が更新されました (version 4.5.56)
 - ketslideがlualatex対応になりました。
 - KETCindyのインストールを参考にしてください。
 - 必須環境: TeX (KETeX, TeXLive) と R
 - Windowsの場合: Sumatra PDFも必要です。
 - 重要: インストール実行時に「すべてのユーザに対してインストール」を選択してください。 (インストール先が C:\Program Files\SumatraPDF になります)
- 2026-06-12 Cinderella が更新されました (build2136)
 - Cinderellaのインストールを参考にしてください。
 - 検索時は beta cinderella としてください。
- 2026-05-19 KETeX が TeXLive20260313 に更新されました
 - 「kettex」または「kettex release」で検索可能です。
 - KETeXのインストール / エディタ設定(TeXWorks等)
- Windows用 一括インストーラ (沼津高専 学生作成)
 - Cinderella, R, Sumatra, KETeX, KETCindy が一括でインストールされます。

和算の幾何と Maxima による解法

- 和算の幾何の問題は面白い教材である
 - ・ 自ら解くことで興味と関心をより高めるだろう

和算の幾何と Maxima による解法

- 和算の幾何の問題は面白い教材である
 - ・ 自ら解くことで興味と関心をより高めるだろう
- まともに解くには洞察力とかなりの計算力を要する

和算の幾何と Maxima による解法

- 和算の幾何の問題は面白い教材である
 - ・ 自ら解くことで興味と関心をより高めるだろう
- まともに解くには洞察力とかなりの計算力を要する
- 数式処理を用いると高校レベルの幾何の知識で十分
 - ・ Maxima はフリーだが高度な計算力．情報も多い

和算の幾何と Maxima による解法

- 和算の幾何の問題は面白い教材である
 - ・ 自ら解くことで興味と関心をより高めるだろう
- まともに解くには洞察力とかなりの計算力を要する
- 数式処理を用いると高校レベルの幾何の知識で十分
 - ・ Maxima はフリーだが高度な計算力・情報も多い
- 数式処理を用いても、簡単に解けない場合が多い
 - ・ 無理式が出ると、多くの場合に計算が破綻する

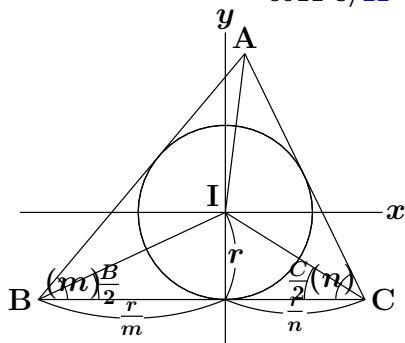
和算の幾何と Maxima による解法

- 和算の幾何の問題は面白い教材である
 - ・ 自ら解くことで興味と関心をより高めるだろう
- まともに解くには洞察力とかなりの計算力を要する
- 数式処理を用いると高校レベルの幾何の知識で十分
 - ・ Maxima はフリーだが高度な計算力・情報も多い
- 数式処理を用いても、簡単に解けない場合が多い
 - ・ 無理式が出ると、多くの場合に計算が破綻する
- そこで、 $m = \tan \frac{B}{2}$, $n = \tan \frac{C}{2}$ と内接円の半径 r で三角形の諸量を表す方法 (mnr 法) を考案した

mnr 法

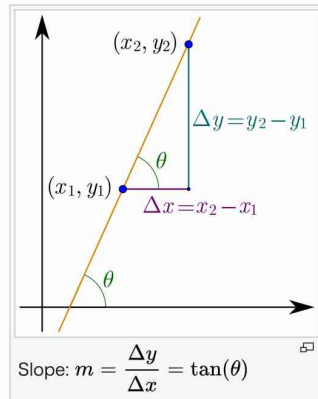
- $m = \tan \frac{B}{2}, n = \tan \frac{C}{2}$

$r =$ 内接円の半径



mnr 法

- $m = \tan \frac{B}{2}, n = \tan \frac{C}{2}$
 $r = \text{内接円の半径}$

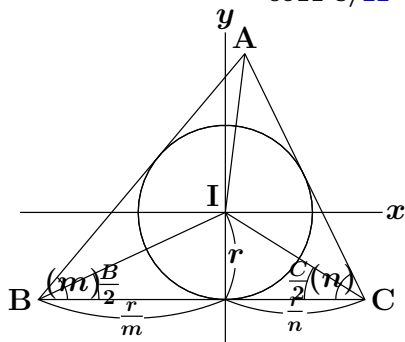


mnr 法

- $m = \tan \frac{B}{2}, n = \tan \frac{C}{2}$

$r =$ 内接円の半径

$\angle B = (m), \angle C = (n)$



mnr 法

- $m = \tan \frac{B}{2}, n = \tan \frac{C}{2}$

r = 内接円の半径

$\angle B = (m), \angle C = (n)$

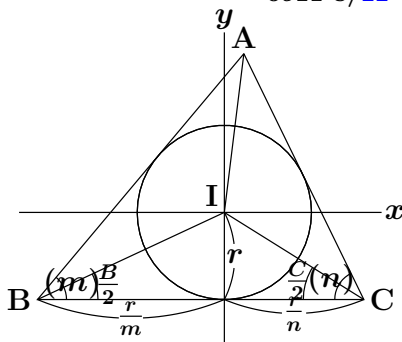
- 三角形の諸量の表現 (有理式)

vtxL: $(-\frac{r}{m}, -r), \text{ vtxR: } (\frac{r}{n}, -r), \text{ vtxT: } (\frac{r(n-m)}{1-mn}, \frac{1+mn}{1-mn})$

edgB: $\frac{r}{m} + \frac{r}{n}, \text{ edgL: } \frac{r(1+m^2)}{m(1-mn)}, \text{ edgR: } \frac{r(1+n^2)}{n(1-mn)}$

内接円 inC, inR, 外接円 cirC, cirR

傍接円 exCa, exRa, exCb, exRb, exCc, exRc



mnr 法

- $m = \tan \frac{B}{2}, n = \tan \frac{C}{2}$

r = 内接円の半径

$\angle B = (m), \angle C = (n)$

- 三角形の諸量の表現 (有理式)

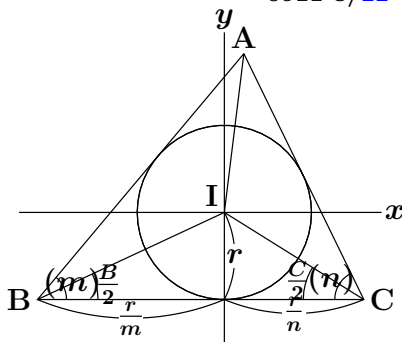
$$\text{vtxL}:(-\frac{r}{m}, -r), \text{vtxR}:(\frac{r}{n}, -r), \text{vtxT}:(\frac{r(n-m)}{1-mn}, \frac{1+mn}{1-mn})$$

$$\text{edgB}:\frac{r}{m} + \frac{r}{n}, \text{edgL}=\frac{r(1+m^2)}{m(1-mn)}, \text{edgR}:\frac{r(1+n^2)}{n(1-mn)}$$

内接円 inC, inR, 外接円 cirC, cirR

傍接円 exCa, exRa, exCb, exRb, exCc, exRc

- mnr 法の Maxima ライブラリ mnr.max を作成



mnr 法の主コマンド

- 基本コマンド

putT(m,n,r) 内心を原点にして三角形をおく

slideT(p1,p2) p1 が p2 に一致するように平行移動

rotateT(m,p) p の周りに $(m) = 2 \tan^{-1}(m)$ 回転

mnr 法の主コマンド

● 基本コマンド

putT(m,n,r) 内心を原点にして三角形をおく

slideT(p1,p2) p1 が p2 に一致するように平行移動

rotateT(m,p) p の周りに $(m) = 2 \tan^{-1}(m)$ 回転

● 式変形の主なコマンド

numerf(f),denomf(f) 分子分母を因数分解

frfactor(f) 分数を簡単化

frev(eq,rep) eq に rep を代入して簡単化

radcan(s) 無理式の簡単化 (Maxima)

図形のための主なコマンド

- 角の変換

`supA(m),comA(m)` 補角と余角

`plusA(m1,m2),minusA(m1,m2)` 角の和と差

`timesA(nn,m)` 角の整数倍

- その他

`dotProd(v1,v2),crossProd(v1,v2)` 内積と外積

`lenSeg2(p1,p2)` 距離の平方

`meetLine(pts1,pts2)` 交点

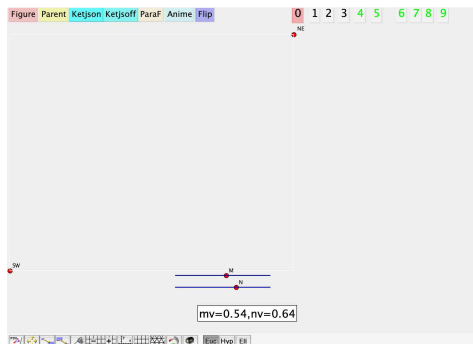
`comTan1,comTan1C` 共通外接線, 共通内接線

KeTCindy による求解 1

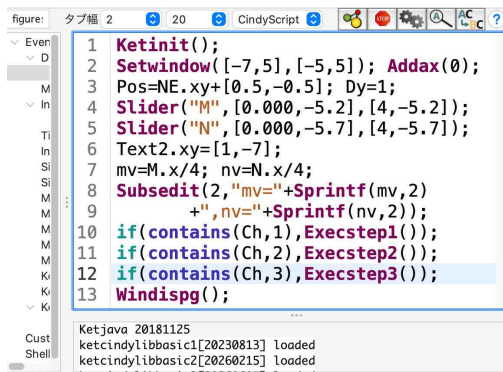
(1) Cinderella(cdy) ファイルと mkcmd ファイルを準備

例えば malfattiin.cdy, malfattiinmkcmd.txt

(2) cdy は雛形ファイルを用いる (mkcmd.txt を import)



malfattiin.cdy のスクリーン



figures スロット

KeTCindy による求解 2

(3) mkcmd の記述 1

```
//step 1↓
mkcmd1()=(↓
  cmdL1=concat(Mxbatch("mnr"),[↓
    "putT(m,n,r)",↓
    "A:vtxT; B:vtxL; C:vtxR; I:inC",↓
    "AB:edgL; BC:edgB; AC:edgR",↓
    "eq1:numerf(r1+r2-AB); eq2:numerf(r2+r3-BC); eq3:numerf(r3+r1-AC)",↓
    "sol:algsys([eq1,eq2,eq3],[r1,r2,r3])",↓
    "r1:frev(r1,sol);r2:frev(r2,sol);r3:frev(r3,sol)",↓
    "make:0",↓
    "end"↓
  ]);↓
);↓
var1="A::B::C::eq1::eq2::eq3::sol::r1::r2::r3";↓
Execstep1()=(↓
  Setmnrstep(1);↓
  mkcmd1();↓
  CalcbyMset(var1,"mxans1",cmdL1,op(25));↓
  Disptex1(); Dispfig1();↓
);↓
```

KeTCindy による求解 2

(4) mkcmd の記述 2

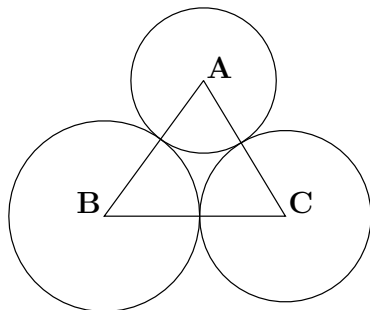
```

Disptex(Pos,Dy,"ABCをおく",opsb);↓
Disptex([Pos_1+0.5,Pos_2],Dy*0.9,"A::B::C",opsf);↓
Disptex([Pos_1-0.5,Pos_2],Dy,"3円が接する連立方程式",opsb);↓
Disptex([Pos_1+0.5,Pos_2],Dy*0.9,"eq1::eq2::eq3",opsf);↓
Disptex([Pos_1-0.5,Pos_2],Dy,"連立方程式の解",opsb);↓
Disptex([Pos_1+0.5,Pos_2],Dy*0.9,"sol",opsf);↓
Disptex([Pos_1-0.5,Pos_2],Dy,"3円の半径",opsb);↓
Disptex([Pos_1+0.5,Pos_2],Dy*0.9,"r1::r2::r3",opsf);↓
);↓
Dispfig1():=(↓
  Assignvalue();↓
  Parsevv("A::B::C");↓
  Listplot("1",[A,B,C,A],["do"]);↓
  Circledata("1a",[A,r1]);Circledata("1b",[B,r2]);↓
  Circledata("1c",[C,r3]);↓
  Letter([A,"ne","A",B,"nw","B",C,"ne","C"]);↓
);↓

```

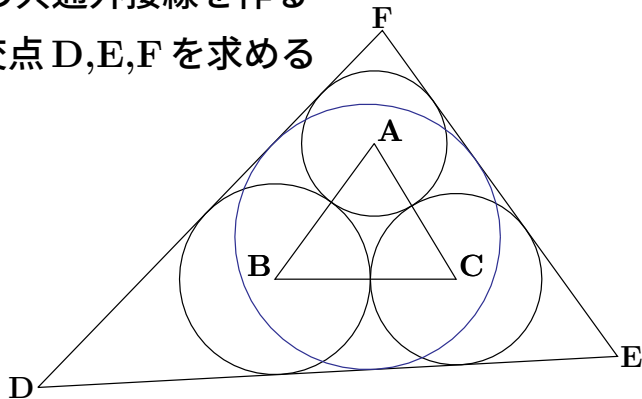
中からの解法 (方針)

- (1) putT(m,n,r) で ABC をおく
- (2) 中心が A,B,C で互いに接する 3 円 C1,C2,C3 を作る



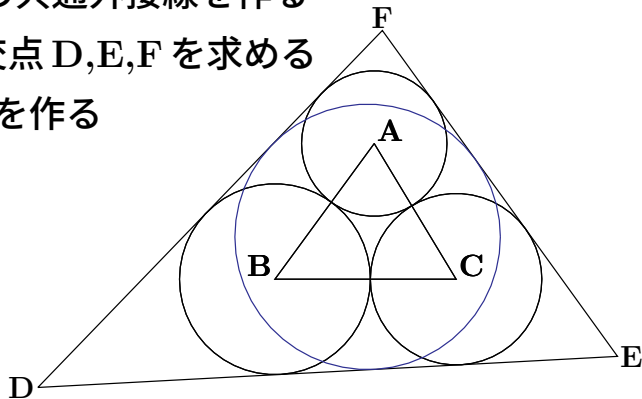
中からの解法 (方針)

- (1) $\text{putT}(m,n,r)$ で ABC をおく
- (2) 中心が A,B,C で互いに接する 3 円 C_1, C_2, C_3 を作る
- (3) comTan で円の共通外接線を作る
- (4) 共通外接線の交点 D,E,F を求める



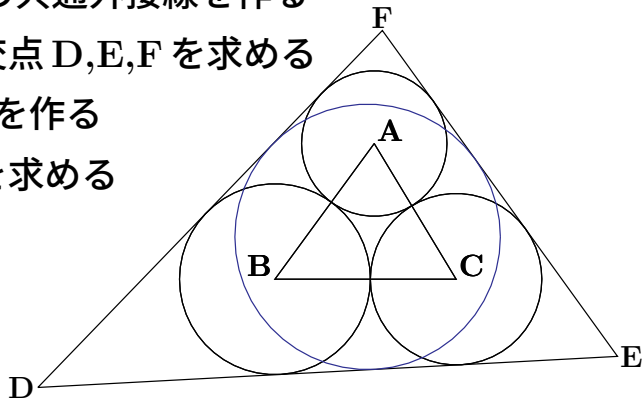
中からの解法 (方針)

- (1) $\text{putT}(m,n,r)$ で ABC をおく
- (2) 中心が A,B,C で互いに接する 3 円 C_1, C_2, C_3 を作る
- (3) comTan で円の共通外接線を作る
- (4) 共通外接線の交点 D,E,F を求める
- (5) DEF の内接円を作る



中からの解法 (方針)

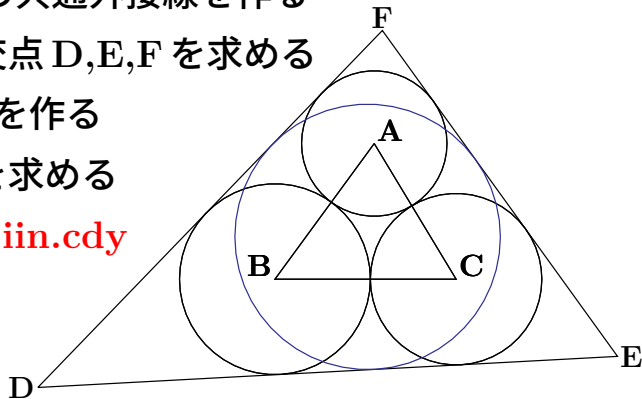
- (1) $\text{putT}(m,n,r)$ で ABC をおく
- (2) 中心が A,B,C で互いに接する 3 円 C_1,C_2,C_3 を作る
- (3) comTan で円の共通外接線を作る
- (4) 共通外接線の交点 D,E,F を求める
- (5) DEF の内接円を作る
- (6) 内接円の半径を求める



中からの解法 (方針)

- (1) $\text{putT}(m,n,r)$ で ABC をおく
- (2) 中心が A,B,C で互いに接する 3 円 C_1, C_2, C_3 を作る
- (3) comTan で円の共通外接線を作る
- (4) 共通外接線の交点 D,E,F を求める
- (5) DEF の内接円を作る
- (6) 内接円の半径を求める

デモ [malfattiin.cdy](#)



中からの解法 (結果)

マウスをドラッグして自由要素を動かす

Figure Parent Ketjson Ketjsoff ParaF Anime Flip

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

NE

m, n, r, iR を r_1, r_2, r_3 で表す

$$\text{sol:} \left[m = \sqrt{\frac{r_1 r_3}{r_2 r_3 + r_2^2 + r_1 r_2}}, n = r_1 / ((r_3 + r_2 + r_1) \sqrt{\frac{r_1 r_3}{r_2 r_3 + r_2^2 + r_1 r_2}}), r = \frac{r_1 r_3}{(r_3 + r_2 + r_1) \sqrt{\frac{r_1 r_3}{r_2 r_3 + r_2^2 + r_1 r_2}}} \right]$$

$$m: \frac{\sqrt{r_1} \sqrt{r_3}}{\sqrt{r_2} \sqrt{r_3 + r_2 + r_1}}$$

$$n: \frac{\sqrt{r_1} \sqrt{r_2}}{\sqrt{r_3} \sqrt{r_3 + r_2 + r_1}}$$

$$r: (\sqrt{r_1} \sqrt{r_2} \sqrt{r_3}) / \sqrt{r_3 + r_2 + r_1}$$

$$iR: \sqrt{2}((2r_1 r_2^2 + 4r_1^2 r_2 + 2r_1^3) r_3^6 + (7r_1 r_2^3 + 12r_1^2 r_2^2 + 3r_1^3 r_2 - 2r_1^4) r_3^5 + (7r_1^2 r_2^3 + 12r_1^3 r_2^2 + 3r_1^4 r_2 - 2r_1^5) r_3^4 + \dots)$$

$t_1 = \sqrt{r_1}, t_2 = \sqrt{r_2}, t_3 = \sqrt{r_3}$ と置き換え

$$iRs: \frac{t_1 t_2 t_3^3 + \sqrt{t_3^2 + t_2^2 + t_1^2} (t_1 t_2 t_3^2 + t_1 t_2^2 t_3) + t_1^2 t_2 t_3^2 + (t_1 t_2^3 + t_1^2 t_2^2) t_3}{t_2 t_3 \sqrt{t_3^2 + t_2^2 + t_1^2} + t_1 t_3^2 + t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2^2}$$

$$iRs2: \frac{t_1 t_2 t_3 (t_3^2 + t_1 t_3 + t_3 + t_2^2 + t_1 t_2 + t_2)}{t_1 t_3^2 + t_1 t_2 t_3 + t_2 t_3 + t_1 t_2^2}$$

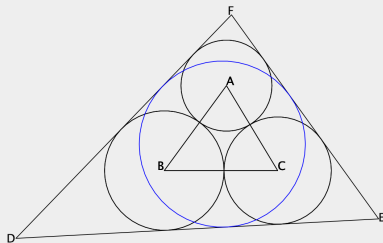
$t = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}$ とおき分子を有理化する

$$niR: t_1 t_2 t_3^3 + t_1^2 t_2 t_3^2 + t_1 t_2 t_3^2 + t_1 t_2^3 t_3 + t_1^2 t_2^2 t_3 + t_1 t_2^2 t_3$$

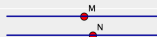
$$niR2: -(2t_1^2 t_2^2 t_3^2 (t_2 t_3 - t_1 t_3 - t_1 t_2) (t_3^2 + t_2^2))$$

$$diR2: -(t_1 t_2 t_3 (t_3 + t_2 + t_1 - t) (t_2 t_3 - t_1 t_3 - t_1 t_2) (t_3^2 + t_2^2))$$

$$iR2: \frac{2t_1 t_2 t_3}{t_3 + t_2 + t_1 - t}$$



SW



$$mv=0.51, nv=0.56$$

中からの解法 (考察)

$$\bullet \ r = \frac{2\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} - \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}$$

中からの解法 (考察)

- $$r = \frac{2\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} - \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}$$
- 精要算法 1781 の解とは違う

$$2r = \frac{2r_1 \times 2\sqrt{r_2 r_3}}{2\sqrt{r_1(r_1 + r_2 + r_3)} - 2r_1} = \frac{2r_1 \sqrt{r_2 r_3}}{\sqrt{r_1(r_1 + r_2 + r_3)} - r_1}$$

中からの解法 (考察)

- $$r = \frac{2\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} - \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}$$

- 精要算法 1781 の解とは違う

$$2r = \frac{2r_1 \times 2\sqrt{r_2 r_3}}{2\sqrt{r_1(r_1 + r_2 + r_3)} - 2r_1} = \frac{2r_1 \sqrt{r_2 r_3}}{\sqrt{r_1(r_1 + r_2 + r_3)} - r_1}$$

- 算法点竄手引草 1841 の解とも違う

中からの解法 (考察)

- $$r = \frac{2\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} - \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}$$

- 精要算法 1781 の解とは違う

$$2r = \frac{2r_1 \times 2\sqrt{r_2 r_3}}{2\sqrt{r_1(r_1 + r_2 + r_3)} - 2r_1} = \frac{2r_1 \sqrt{r_2 r_3}}{\sqrt{r_1(r_1 + r_2 + r_3)} - r_1}$$

- 算法点竄手引草 1841 の解とも違う
- 誤りが初期に知られていたか，論争があったのか，後世に修正されたかは不明

中からの解法 (考察)

- $$r = \frac{2\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} - \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}$$

- 精要算法 1781 の解とは違う

$$2r = \frac{2r_1 \times 2\sqrt{r_2 r_3}}{2\sqrt{r_1(r_1 + r_2 + r_3)} - 2r_1} = \frac{2r_1 \sqrt{r_2 r_3}}{\sqrt{r_1(r_1 + r_2 + r_3)} - r_1}$$

- 算法点竄手引草 1841 の解とも違う
- 誤りが初期に知られていたか、論争があったのか、後世に修正されたかは不明
- 明星輪寺算額 (1865) では正しい式が掲載

中からの解法 (考察)

- $$r = \frac{2\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} - \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}$$

- 精要算法 1781 の解とは違う

$$2r = \frac{2r_1 \times 2\sqrt{r_2 r_3}}{2\sqrt{r_1(r_1 + r_2 + r_3)} - 2r_1} = \frac{2r_1 \sqrt{r_2 r_3}}{\sqrt{r_1(r_1 + r_2 + r_3)} - r_1}$$

- 算法点竄手引草 1841 の解とも違う
- 誤りが初期に知られていたか、論争があったのか、後世に修正されたかは不明
- 明星輪寺算額 (1865) では正しい式が掲載
- 深川英俊, Sacred Mathematics(2008) も正しい式

明星輪寺算額 (1865)

● 訳

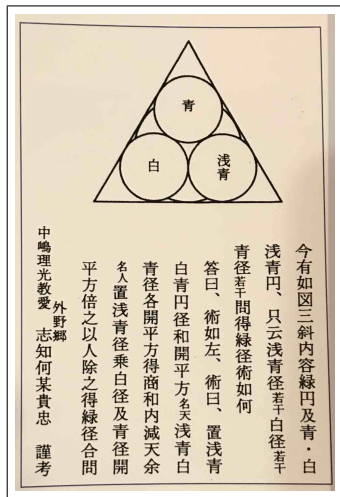
問 図のように三角形の中に緑円(内接円) 青, 白, 浅青の3つの円が入っている. 浅青円, 白円, 青円の直径がそれぞれ与えられているとき, 緑円の直径を求める計算法は如何になるか

答 浅青, 白, 青の各円の直径の和の平方根を求め, これを「天」とする. 浅青, 白, 青の各円の直径の平方根の和から, 「天」を引いた余りを「人」とする. 浅青, 白, 青の各円の直径を掛け合わせて平方根を求め, それを2倍したものを「人」で割ることで, 緑円の直径が得られる

● 3円と内接円の直径を d_1, d_2, d_3, D とする

$$\text{天} = \sqrt{d_1 + d_2 + d_3}, \text{人} = \sqrt{d_1} + \sqrt{d_2} + \sqrt{d_3} - \text{天}$$

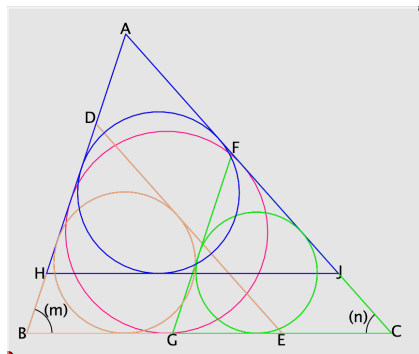
$$D = \frac{2\sqrt{d_1 d_2 d_3}}{\text{人}} = \frac{2\sqrt{d_1 d_2 d_3}}{\sqrt{d_1} + \sqrt{d_2} + \sqrt{d_3} - \sqrt{d_1 + d_2 + d_3}}$$



金生山ライブラリー 1

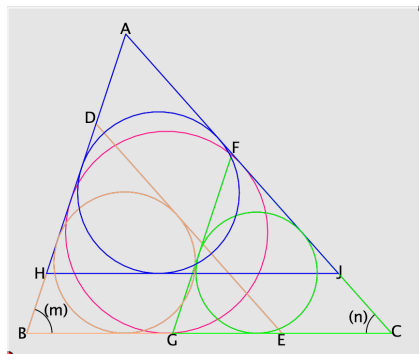
外からの解法 (方針)

(1) putT(m,n,r) で ABC をおき，内接円の半径を r とする



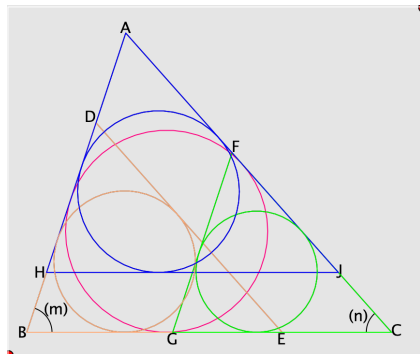
外からの解法 (方針)

- (1) putT(m,n,r) で ABC をおき, 内接円の半径を r とする
- (2) ABC と相似な AHJ, DBE, FGC の内接円 C_1, C_2, C_3 の半径を r_1, r_2, r_3 とする



外からの解法 (方針)

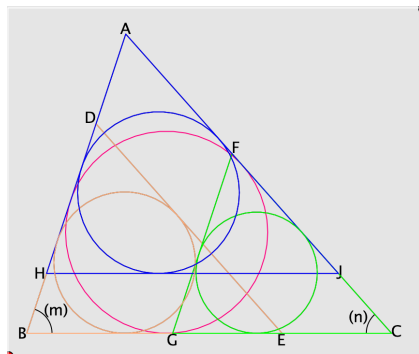
- (1) putT(m,n,r) で ABC をおき, 内接円の半径を r とする
- (2) ABC と相似な AHJ, DBE, FGC の内接円 C_1, C_2, C_3 の半径を r_1, r_2, r_3 とする
- (3) C_1, C_2, C_3 の外接条件からできる連立方程式を解く



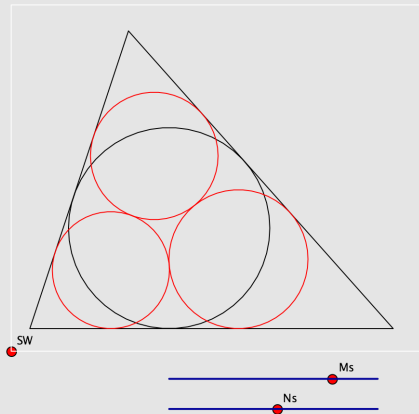
外からの解法 (方針)

- (1) putT(m,n,r) で ABC をおき, 内接円の半径を r とする
- (2) ABC と相似な AHJ, DBE, FGC の内接円 C_1, C_2, C_3 の半径を r_1, r_2, r_3 とする
- (3) C_1, C_2, C_3 の外接条件からできる連立方程式を解く

デモ malfattiout.cdy



外からの解法 (結果)



$$m=0.72, n=0.45$$

NE

和算家の解答を導く

$$r1: \frac{(N+1)(MN-1)r}{(M+1)(MN-N-M-1)}$$

$$r2: \frac{(M+1)(MN-1)r}{(N+1)(MN-N-M-1)}$$

$$r3: \frac{(M+1)(N+1)(MN-N-M-1)r}{4(MN-1)}$$

置き換え $t_1 = \sqrt{s_1}, t_2 = \sqrt{s_2}, t_3 = \sqrt{s_3},$

$$\text{sol3}: [[M=(2t_1t_2t_3-r)/r, N=(2t_1t_3-r)/r]]$$

$$\text{eq5}: t_1(2t_1^2t_2^2t_3^2 - 2rt_1t_2t_3^2 - 2rt_1t_2^2t_3 - 2rt_1^2t_2t_3 + r^2t_2t_3 +$$

$$\text{sol5}: [r = -\frac{t_1t_2t_3\sqrt{t_3^2+t_2^2+t_1^2} - t_1t_2t_3^2 + (-(t_1t_2^2) - t_1^2t_2)t_3}{(t_2+t_1)t_3+t_1t_2}]$$

$$\text{sol}: r = \frac{t_1t_2t_3\sqrt{t_3^2+t_2^2+t_1^2} + t_1t_2t_3^2 + (t_1t_2^2 + t_1^2t_2)t_3}{(t_2+t_1)t_3+t_1t_2}$$

$$r: \frac{t_1t_2t_3(\sqrt{t_3^2+t_2^2+t_1^2} + t_3 + t_2 + t_1)}{t_2t_3 + t_1t_3 + t_1t_2}$$

外からの解法 (考察)

- 明星輪寺の解と一致する

$$r: \frac{t_1 t_2 t_3 (\sqrt{t_3^2 + t_2^2 + t_1^2} + t_3 + t_2 + t_1)}{t_2 t_3 + t_1 t_3 + t_1 t_2}$$

外からの解法 (考察)

- 明星輪寺の解と一致する

$$r: \frac{t_1 t_2 t_3 (\sqrt{t_3^2 + t_2^2 + t_1^2} + t_3 + t_2 + t_1)}{t_2 t_3 + t_1 t_3 + t_1 t_2}$$

- 4 分角が重要な働き

$$r_1: \frac{(N+1)(MN-1)r}{(M+1)(MN-N-M-1)}$$

$$r_2: \frac{(M+1)(MN-1)r}{(N+1)(MN-N-M-1)}$$

$$r_3: \frac{(M+1)(N+1)(MN-N-M-1)r}{4(MN-1)}$$

Seitz(1881) の導出式

● The Mathematical Visitor pp.190-191

III.—Solution by E. B. SEITZ, Member of the London Mathematical Society, Professor of Mathematics at the North Missouri State Normal School, Kirksville, Missouri.

Let ABC be the triangle, M, N, P the centers of the circles, D, E, F, G, H, K the points of tangency.

Let $MD = x$, $NF = y$, $PH = z$, and r = the radius of the inscribed circle of the triangle. Then $AD = AE = x \cot \frac{1}{2}A$, $BF = BG = y \cot \frac{1}{2}B$, $CH = CK = z \cot \frac{1}{2}C$,

$DF = 2\sqrt{(xy)}$, $EK = 2\sqrt{(xz)}$, $GH = 2\sqrt{(yz)}$, and we have the equations,

$$x \cot \frac{1}{2}A + 2\sqrt{(xy)} + y \cot \frac{1}{2}B = c \dots \dots \dots (1),$$

$$x \cot \frac{1}{2}A + 2\sqrt{(xz)} + z \cot \frac{1}{2}C = b \dots \dots \dots (2),$$

$$y \cot \frac{1}{2}B + 2\sqrt{(yz)} + z \cot \frac{1}{2}C = a \dots \dots \dots (3).$$

By Trigonometry we have

$$\frac{\sin \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}B}{b} = \frac{\sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C}{c} \dots \dots \dots (4), \quad \frac{\sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A}{a} = \frac{\sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C}{c} \dots \dots \dots (5);$$

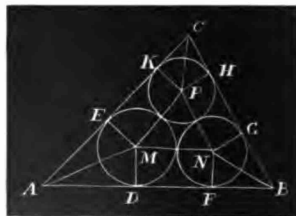
and from these two equations we can deduce the following:

$$b(\cot \frac{1}{2}A - \tan \frac{1}{2}B) = c(\cot \frac{1}{2}A - \tan \frac{1}{2}C) \dots \dots (6), \quad a(\cot \frac{1}{2}B - \tan \frac{1}{2}A) = c(\cot \frac{1}{2}B - \tan \frac{1}{2}C) \dots \dots (7).$$

Dividing (1) by (2) and (3) respectively, and clearing of fractions, we have

$$b[x \cot \frac{1}{2}A + 2\sqrt{(xy)} + y \cot \frac{1}{2}B] = c[x \cot \frac{1}{2}A + 2\sqrt{(xz)} + z \cot \frac{1}{2}C] \dots \dots \dots (8),$$

$$a[x \cot \frac{1}{2}A + 2\sqrt{(xy)} + y \cot \frac{1}{2}B] = c[y \cot \frac{1}{2}B + 2\sqrt{(yz)} + z \cot \frac{1}{2}C] \dots \dots \dots (9).$$



Seitz(1881) の導出式

Subtracting x times (6) from (8), and y times (7) from (9), we have

$$b[x \tan \frac{1}{2}B + 2\sqrt{xy} + y \cot \frac{1}{2}B] = c[x \tan \frac{1}{2}C + 2\sqrt{zx} + z \cot \frac{1}{2}C] \dots\dots\dots (10),$$

$$a[x \cot \frac{1}{2}A + 2\sqrt{xy} + y \tan \frac{1}{2}A] = c[y \tan \frac{1}{2}C + 2\sqrt{yz} + z \cot \frac{1}{2}C] \dots\dots\dots (11).$$

Multiplying (10) by (4), and (11) by (5), and extracting the square root, we have

$$\sqrt{x} \sin \frac{1}{2}B + \sqrt{y} \cos \frac{1}{2}B = \sqrt{x} \sin \frac{1}{2}C + \sqrt{z} \cos \frac{1}{2}C \dots\dots\dots (12),$$

$$\sqrt{x} \cos \frac{1}{2}A + \sqrt{y} \sin \frac{1}{2}A = \sqrt{y} \sin \frac{1}{2}C + \sqrt{z} \cos \frac{1}{2}C \dots\dots\dots (13).$$

Subtracting (13) from (12), we find

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{\sin \frac{1}{2}C + \cos \frac{1}{2}A - \sin \frac{1}{2}B}{\sin \frac{1}{2}C - \sin \frac{1}{2}A + \cos \frac{1}{2}B} = \frac{\cos \frac{1}{2}C + \cos \frac{1}{2}(2B+C)}{\cos \frac{1}{2}C + \cos \frac{1}{2}(2A+C)} = \frac{\cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}(\pi-A)}{\cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}(\pi-B)} = \frac{1 + \tan \frac{1}{2}A}{1 + \tan \frac{1}{2}B} \dots\dots (14).$$

Similarly we find

$$\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}} = \frac{1 + \tan \frac{1}{2}A}{1 + \tan \frac{1}{2}C} \dots\dots\dots (15).$$

Substituting the value of $\sqrt{y}$ from (14) in (1), we have

$$\left[\cot \frac{1}{2}A + 2 \left(\frac{1 + \tan \frac{1}{2}A}{1 + \tan \frac{1}{2}B} \right) + \cot \frac{1}{2}B \left(\frac{1 + \tan \frac{1}{2}A}{1 + \tan \frac{1}{2}B} \right)^2 \right] x = c,$$

or
$$\left[\frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2}A}{2 \tan \frac{1}{2}A} + 2 \left(\frac{1 + \tan \frac{1}{2}A}{1 + \tan \frac{1}{2}B} \right) + \left(\frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2}B}{2 \tan \frac{1}{2}B} \right) \left(\frac{1 + \tan \frac{1}{2}A}{1 + \tan \frac{1}{2}B} \right)^2 \right] x = c,$$

whence
$$\begin{aligned} x &= \frac{2c \tan \frac{1}{2}A \tan \frac{1}{2}B (1 + \tan \frac{1}{2}B)}{(1 + \tan \frac{1}{2}A)(\tan \frac{1}{2}A + \tan \frac{1}{2}B)(1 - \tan \frac{1}{2}A \tan \frac{1}{2}B)[1 + \tan \frac{1}{2}(A+B)]} \\ &= \frac{c \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B (1 + \tan \frac{1}{2}B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)(1 + \tan \frac{1}{2}A)[1 + \tan \frac{1}{2}(\pi-C)]} = \frac{r(1 + \tan \frac{1}{2}B)}{(1 + \tan \frac{1}{2}A)[1 + \tan \frac{1}{2}(\pi-C)]} \\ &= \frac{\frac{1}{2}r(1 + \tan \frac{1}{2}B)(1 + \tan \frac{1}{2}C)}{1 + \tan \frac{1}{2}A}. \end{aligned}$$

Substituting the value of x in (14) and (15), we find

$$y = \frac{\frac{1}{2}r(1 + \tan \frac{1}{2}A)(1 + \tan \frac{1}{2}C)}{1 + \tan \frac{1}{2}B}, \quad \text{and} \quad z = \frac{\frac{1}{2}r(1 + \tan \frac{1}{2}A)(1 + \tan \frac{1}{2}B)}{1 + \tan \frac{1}{2}C}.$$

An excellent solution was furnished by *William Hoover*, and a very brief one by Professor *Cassey*. We hope to publish other solutions in a future No.

This celebrated problem has a history, and is known to mathematicians as "Malfatti's Problem."

Seitz(1881) の導出式

Subtracting x times (6) from (8), and y times (7) from (9), we have

$$b[x \tan \frac{1}{2}B + 2\sqrt{(xy)} + y \cot \frac{1}{2}B] = c[x \tan \frac{1}{2}C + 2\sqrt{(xz)} + z \cot \frac{1}{2}C] \dots\dots\dots (10),$$

$$a[x \cot \frac{1}{2}A + 2\sqrt{(xy)} + y \tan \frac{1}{2}A] = c[y \tan \frac{1}{2}C + 2\sqrt{(yz)} + z \cot \frac{1}{2}C] \dots\dots\dots (11).$$

Multiplying (10) by (4), and (11) by (5), and extracting the square root, we have

$$\sqrt{x} \sin \frac{1}{2}B + \sqrt{y} \cos \frac{1}{2}B = \sqrt{x} \sin \frac{1}{2}C + \sqrt{z} \cos \frac{1}{2}C \dots\dots\dots (12),$$

$$\sqrt{x} \cos \frac{1}{2}A + \sqrt{y} \sin \frac{1}{2}A = \sqrt{y} \sin \frac{1}{2}C + \sqrt{z} \cos \frac{1}{2}C \dots\dots\dots (13).$$

Subtracting (13) from (12), we find

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{\sin \frac{1}{2}C + \cos \frac{1}{2}A - \sin \frac{1}{2}B}{\sin \frac{1}{2}C - \sin \frac{1}{2}A + \cos \frac{1}{2}B} = \frac{\cos \frac{1}{2}C + \cos \frac{1}{2}(2B+C)}{\cos \frac{1}{2}C + \cos \frac{1}{2}(2A+C)} = \frac{\cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}(\pi-A)}{\cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}(\pi-B)} = \frac{1 + \tan \frac{1}{2}A}{1 + \tan \frac{1}{2}B} \dots\dots (14).$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{2c \tan \frac{1}{2}A \tan \frac{1}{2}B (1 + \tan \frac{1}{2}B)}{(1 + \tan \frac{1}{2}A)(\tan \frac{1}{2}A + \tan \frac{1}{2}B)(1 - \tan \frac{1}{2}A \tan \frac{1}{2}B)[1 + \tan \frac{1}{2}(A+B)]'} \\ &= \frac{c \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B (1 + \tan \frac{1}{2}B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)(1 + \tan \frac{1}{2}A)[1 + \tan \frac{1}{2}(\pi-C)]'} = \frac{r(1 + \tan \frac{1}{2}B)}{(1 + \tan \frac{1}{2}A)[1 + \tan \frac{1}{2}(\pi-C)]'} \\ &= \frac{\frac{1}{2}r(1 + \tan \frac{1}{2}B)(1 + \tan \frac{1}{2}C)}{1 + \tan \frac{1}{2}A}. \end{aligned}$$

the value of x in (14) and (15), we find

$$y = \frac{\frac{1}{2}r(1 + \tan \frac{1}{2}A)(1 + \tan \frac{1}{2}C)}{1 + \tan \frac{1}{2}B}, \quad \text{and} \quad z = \frac{\frac{1}{2}r(1 + \tan \frac{1}{2}A)(1 + \tan \frac{1}{2}B)}{1 + \tan \frac{1}{2}C}.$$

An excellent solution was furnished by *William Hoover*, and a very brief one by Professor *Casey*. We hope to publish other solutions in a future No.

This celebrated problem has a history, and is known to mathematicians as "Malfatti's Problem."

Seitz の式との同一性

$$r1: \frac{(N+1)(MN-1)r}{(M+1)(MN-N-M-1)}$$

- $L = \tan(A/4)$ とおく

$$L = \tan(\pi/4 - B/4 - C/4) = \frac{1 - \tan(B/4 + C/4)}{1 + \tan(B/4 + C/4)}$$

$$= \frac{1 - \frac{M+N}{1-MN}}{1 + \frac{M+N}{1-MN}} = \frac{1-MN-M-N}{1-MN+M+N}$$

$$1 + L = 1 + \frac{1-MN-M-N}{1-MN+M+N} = 2 \frac{1-MN}{1-MN+M+N}$$

$$\frac{1+L}{2} = \frac{1-MN}{1-MN+M+N}$$

Seitz の式との同一性

$$r1: \frac{(N+1)(MN-1)r}{(M+1)(MN-N-M-1)}$$

- $L = \tan(A/4)$ とおく

$$L = \tan(\pi/4 - B/4 - C/4) = \frac{1 - \tan(B/4 + C/4)}{1 + \tan(B/4 + C/4)}$$

$$= \frac{1 - \frac{M+N}{1-MN}}{1 + \frac{M+N}{1-MN}} = \frac{1 - MN - M - N}{1 - MN + M + N}$$

$$1 + L = 1 + \frac{1 - MN - M - N}{1 - MN + M + N} = 2 \frac{1 - MN}{1 - MN + M + N}$$

$$\frac{1+L}{2} = \frac{1 - MN}{1 - MN + M + N}$$

$$s1 = \frac{r1}{r} = \frac{(N+1)(MN-1)}{(M+1)(MN-N-M-1)} = \frac{(1+N)(1+L)}{2(1+M)}$$

Seitz の式との同一性

$$r1: \frac{(N+1)(MN-1)r}{(M+1)(MN-N-M-1)}$$

- $L = \tan(A/4)$ とおく

$$\begin{aligned} L &= \tan(\pi/4 - B/4 - C/4) = \frac{1 - \tan(B/4 + C/4)}{1 + \tan(B/4 + C/4)} \\ &= \frac{1 - \frac{M+N}{1-MN}}{1 + \frac{M+N}{1-MN}} = \frac{1-MN-M-N}{1-MN+M+N} \end{aligned}$$

$$1 + L = 1 + \frac{1-MN-M-N}{1-MN+M+N} = 2 \frac{1-MN}{1-MN+M+N}$$

$$\frac{1+L}{2} = \frac{1-MN}{1-MN+M+N}$$

$$s1 = \frac{r1}{r} = \frac{(N+1)(MN-1)}{(M+1)(MN-N-M-1)} = \frac{(1+N)(1+L)}{2(1+M)}$$

- したがって

$$s1 = \frac{(1+\tan C/4)(1+\tan A/4)}{2(1+\tan B/4)}$$

Seitz の式との同一性

$$r1: \frac{(N+1)(MN-1)r}{(M+1)(MN-N-M-1)}$$

- $L = \tan(A/4)$ とおく

$$\begin{aligned} L &= \tan(\pi/4 - B/4 - C/4) = \frac{1 - \tan(B/4 + C/4)}{1 + \tan(B/4 + C/4)} \\ &= \frac{1 - \frac{M+N}{1-MN}}{1 + \frac{M+N}{1-MN}} = \frac{1 - MN - M - N}{1 - MN + M + N} \end{aligned}$$

$$1 + L = 1 + \frac{1 - MN - M - N}{1 - MN + M + N} = 2 \frac{1 - MN}{1 - MN + M + N}$$

$$\frac{1+L}{2} = \frac{1 - MN}{1 - MN + M + N}$$

$$s1 = \frac{r1}{r} = \frac{(N+1)(MN-1)}{(M+1)(MN-N-M-1)} = \frac{(1+N)(1+L)}{2(1+M)}$$

- したがって

$$s1 = \frac{(1 + \tan C/4)(1 + \tan A/4)}{2(1 + \tan B/4)}$$

$$y = \frac{\frac{1}{2}r(1 + \tan \frac{1}{4}A)(1 + \tan \frac{1}{4}C)}{1 + \tan \frac{1}{4}B}$$

結論

- 数学史研究における客観的検証ツールとしての可能性
 - ・ mn_r 法と数式処理は、人間の手計算（点竄）が陥った歴史的誤謬を客観的に証明できる
 - ・ 権威ある『精要算法』の誤りを正し、『明星輪寺算額』の真実を裏付けた

結論

- 数学史研究における客観的検証ツールとしての可能性
 - ・ mn_r 法と数式処理は、人間の手計算（点竄）が陥った歴史的誤謬を客観的に証明できる
 - ・ 権威ある『精要算法』の誤りを正し、『明星輪寺算額』の真実を裏付けた
- 数学教育への新しいアプローチ
 - ・ 高度な幾何のひらめきがなくても、題意から正しく立式できれば解に到達できる
 - ・ 学生が自ら歴史を「検証」することで、和算への興味関心はさらに高まる

結論

- 今後の課題

- ・ 4分角の導入など，より複雑な算額問題へ対応するための `mnr` 法の拡張と工夫
- ・ 初学者が確実に対話的求解を行えるためのマニュアルとエラーチェック機能の整備