# Maxima と KeTCindy による和算問題の解法と教材化

KeTCindy センター　髙遠　節夫
Setsuo Takato, KeTCindy Center, Magnolia Inc.

山口大学・教育学部　北本　卓也
Takuya Kitamoto, Faculty of Education, Yamaguchi University

## 1　はじめに

和算の図形問題は，各地の神社仏閣に掲額された算額にも多く取り上げられている．例えば，図 1 は新潟県白山神社に掲額されていたという算額 ([6],[10]) で，右側の問題は，上垣渉 ([9]) によって「日本の定理 II」と呼ばれている．

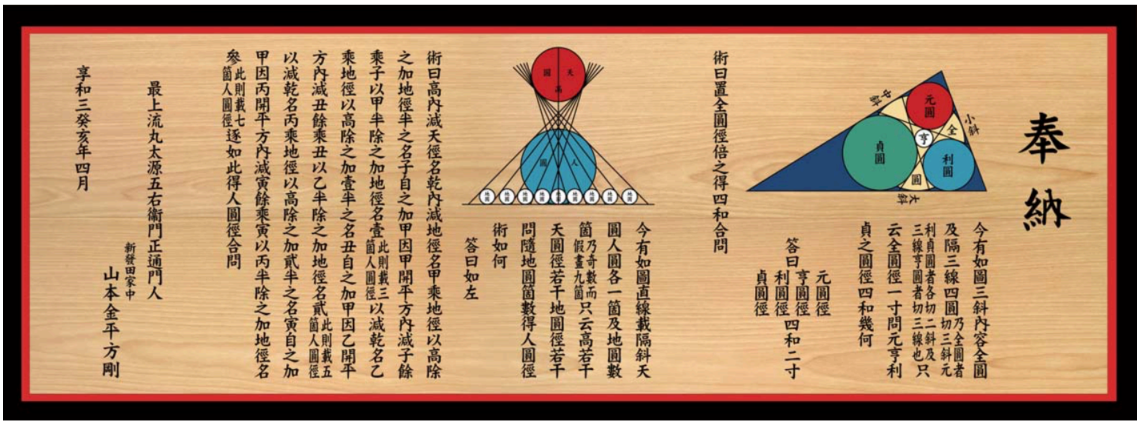



図 1: 白山神社の紛失算額[1]

このような三角形と円が接する問題を数式処理で解こうとすると，無理式の連立方程式となって，解を求めることができない場合が多い．そこで，三角形について，2 底角の半角の正接と内接円の半径で諸量を表す方法を考案した．すなわち，図 2 の三角形において，$m=\tan\frac{B}{2}, n=\tan\frac{C}{2}$ および内接円の半径を $r$ とおき，三角形の諸量を $m,n,r$ の有理式で表すことにした．著者は, この方法を MNR 法と呼ぶことにした[2]．このとき，$\mathrm{B}(-\frac{r}{m},\ -r)$, $\mathrm{C}(\frac{r}{n},\ -r)$ であり，頂角 $A$ については

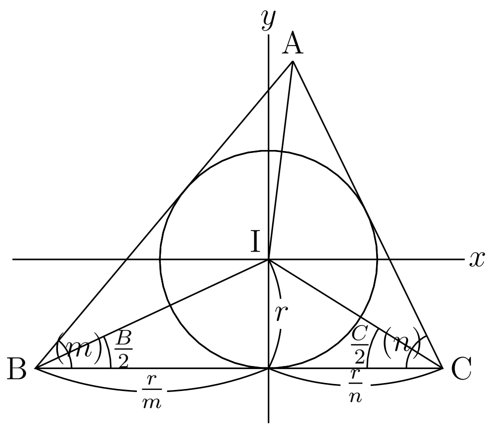



図 2: MNR 法

$$\tan\frac{A}{2}=\tan\frac{\pi-B-C}{2}=\cot\frac{B+C}{2}=\frac{1-mn}{m+n}$$

[1]涌田和芳と外川一仁によって他の和算書を参考に復元された図である．([10])
[2]平面の直線の方程式では，傾き $\tan\theta$ を $m$ と表すことが多いというのが理由である．

となる．また，頂点 A の座標も直線 AB, AC の交点として次のように求められる．

$$\left(\frac{r(n-m)}{1-mn}, \frac{1+mn}{1-mn}\right)$$

なお，通常は底辺を下側にとるが，その場合は $1-mn>0$ となる．

辺の長さについては，次のようになる．

$$\mathrm{BC}=\frac{r}{m}+\frac{r}{n},\ \mathrm{AB}=\frac{r(1+m^2)}{m(1-mn)},\ \mathrm{AC}=\frac{r(1+n^2)}{n(1-mn)}$$

外心 cirC，外接円 cirR，傍心 exCa，傍接円 exRa なども有理式で表される．

MNR 法では半角の正接が重要となる．そこで, $\alpha\ (-\pi<\alpha<\pi)$ について, $\tan\frac{\alpha}{2}=t$ となる $\alpha$ を $(t)$ と表すことにする．すなわち, $\alpha=2\tan^{-1}t$ である．このとき, $\alpha=(t)$ の補角 $\pi-\alpha$ は $\tan\frac{\pi-\alpha}{2}=\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{t}$ より $(\frac{1}{t})$ と表される．また, 余角 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ は $\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})=\frac{1-t}{1+t}$ となる．これらを用いて，補角 supA，余角 comA，角の和 plusA，差 minusA などの関数を定義した．それ以外にも，以下のような汎用関数が定義されている[3]．

| | |
|---|---|
| numer(f) | 方程式 (=0) の分子を因数分解 :=factor(num(ratsimp(f))) |
| frev(eq,rep) | eq に rep を代入して分数式を簡単化 |
| frfactor(eq,rep) | eq に rep を代入して分数式を因数分解して簡単化 |
| nthfactor(pol,k) | 多項式の k 番目の因子を返す |
| crossProd(v1,v2) | 外積 |
| lenSeg2(p1,p2) | p1 [p2-p1] の長さの平方 |
| meetLine(pts1,pts2) | 2 線分の交点 (pts は 2 点のリスト) |
| comTan(C1,r1,C2,r2) | 円の共通接線 |
| contCL(C,r,pt1,pt2) | 円と直線が接する条件 |

MNR 法では，最初に `putT(m,n,r)` によって，角 $B=$(m), $C=$(n), inC= $(0,0)$, inR=r である三角形 ABC をおき，適切な位置に配置するのが通常である．

| | |
|---|---|
| slideT(p1,p2) | p1 が p2 になるように平行移動 |
| rotateT(m,pt) | pt を中心に (m) 回転 |

MNR 法のライブラリは，ketcindy のライブラリフォルダ ketlib にあり，Maxima では `batch` コマンドで読み込むことができる．KETCindy では，Maxima 呼び出しのコマンド列の最初に `Mxbatch("mnr")` を書き込めばよい．次節では MNR 法の準備，3 節と 4 節では, 例題として文献 [8] にある問 2.2.5(成田山新勝寺の算額) の解法を示し，5 節と 6 節では，日本の定理 II の証明を述べる．

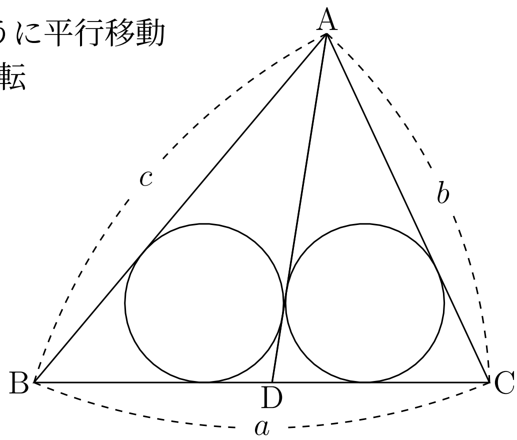



図 3: AD を $a, b, c$ で表す (問 2.2.5)

[3] 関数一覧ファイルは [3] からダウンロードされる KeTCindy フォルダの doc の中にある．

# 2　準備

## 2.1　Cinderela, Maxima, KETCindy のインストール

MNR 法を実行するためには，Cinderella([1]) と Maxima([2])[4]のダウンロードとインストールが必要である．また，ketcindy-xxx(xxx はバージョン)([3]) もダウンロードしてデスクトップなどにおく[5]．KETCindy のインストールについては，TEX(TeXLive か KeTTeX[5][6]) を組み込んでいる場合は, ketcindy-xxx/doc/ketcindysettings.cdy を ketcindy home([4]) の「KeTCindy のインストール」に従う． そうでない場合は，以下のスクリプトが書かれたファイル `ketcindy.ini` をユーザホームの直下におけばよい．

```
Dirhead="(ketcindy のパス)/ketcindy4.5.21/scripts";
PathM="(maxima のパス)/usr/local/bin/maxima";
Dircdy=replace(Dircdy,"/C:","C:");
Dirlib=Dirhead+pathsep()+"ketlib";
setdirectory(Dirlib);
import("ketcindylibbasic1r.cs");
import("ketcindylibbasic2r.cs");
import("ketcindylibbasic3r.cs");
import("ketcindyliboutr.cs");
```

## 2.2　MNR 法のためのファイル作成

ketcindy/doc/work にあるサンプルファイルの 1 つを名称変更 (例えば naritasan.cdy) してダブルクリックすると， 図 4 の左側の画面 (Cindy 画面) が開く．

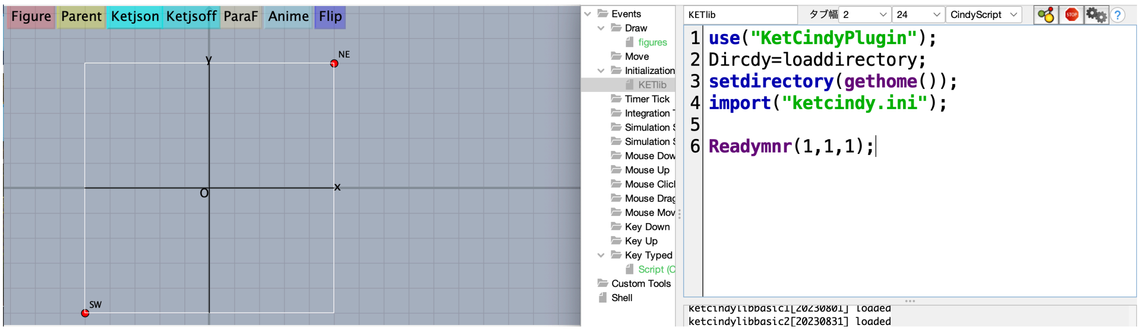



図 4: Cindy 画面と CindyScript(ketlib スロット)

図 4 の右側はメニューの「CindyScript」を押したときに開く Script 画面である．Script にはいくつかのスロットがあるが，KETCindy では状態変化があると常に最初から実行する figures と実行ボタン (ギヤマーク) を押したときだけ実行する ketlib が用いられる．ketlib には，KETCindy の実行のために必要な 4 行のコマンドが書かれているが，その後に `Readymnr`[7]を書き込んで実行すると，(1) 画面に実行するブロック (Ch) を選ぶボタ

[4]いずれもフリーである．
[5]Windows の場合は，バージョンの前の-をとり，C の直下などパスに全角文字が入らない場所におく．
[6]TeXLive のサブセット版 (サイズは 1/3 程度) で，KETCindy の協力者によって作成された．
[7]MNR 法のために追加したコマンドで，右上からの座標とボタン間隔の引数をもつ．

ン，(2) figures と ketlib にコピーするスクリプトファイル，および (3) MNR 法のコマンド列からなる雛形ファイル naritasanmkcmd.txt の 3 つが作成される．

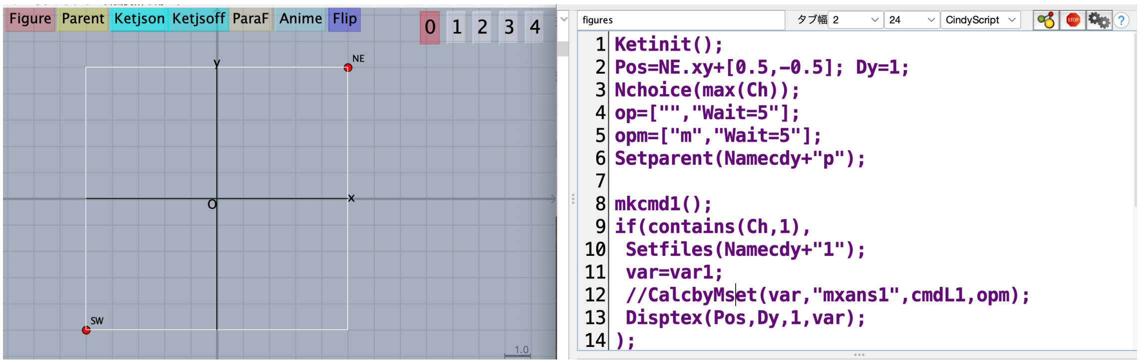



図 5: MNR 法のための画面と figures スロット

naritasanmkcmd.txt には，コマンド列 cmdL と変数リスト var の枠組みが書かれている．

図 5 の右側は naritasanfigure.txt がコピーされた figure スロットで，naritasnmkcmd.txt を別のテキストエディタで開いて内容を記述したら，Cinderella に戻り 12 行のコメントアウトを外してギヤマークを押して実行してから，画面のボタン 1 を押せばよい[8]．ここで，13 行の Disptex は実行してできる var の結果を画面に表示するコマンドである．

## 3　成田山新勝寺算額の解法 (1)

MNR 法を用いる場合，図 6 のようなラフスケッチを描いておいた方が考えやすい．この図を見ながら．naritasanmkcmd.txt に以下のスクリプトを追加する．

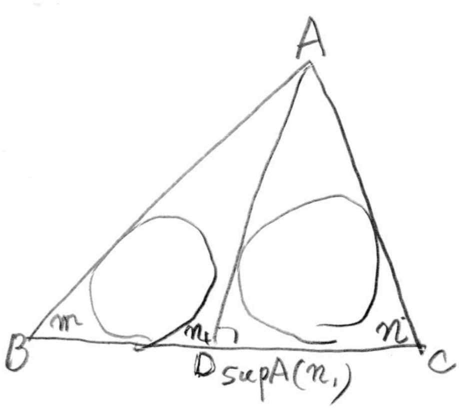



図 6: ラフスケッチ

```
mkcmd1():=(
 cmdL1=concat(Mxbatch("mnr"),[
 "putT(m,n1,r)",/左の三角形をおく
 "A:vtxT; B:vtxL; D:vtxR; I1:inC",
 "AD:edgR; AB:edgL; BD:edgB",//右の三角形をおく
 "putT(supA(n1),n,r); slideT(vtxL,D)",
 "C:vtxR; I2:inC; DC:edgB; AC:edgR",
 "BC:BD+DC", //左右の AD が一致するように方程式を解く
 "eq:edgL-AD; sol:solve(eq,n1)",
 "fe:frevL([A,B,D,C,I2],sol[2])",
       //画面の表示を見て，A,B,D,C,I2 に 2 番目の解を代入する
 "A:fe[1]; B:fe[2]; D:fe[3]; C:fe[4]; I2:fe[5]",
 "fe:frevL([AB,BD,AD,AC,BC],sol[2])",
 "AB:fe[1]; BD:fe[2]; AD:fe[3]; AC:fe[4]; BC:fe[5]",
```

[8] opm は Maxima を強制実行，op はスクリプトが同じであれば実行しないことを指示する．

```
  "end"
  ]);
 );
 var1pt="A::B::C::D::I1::I2"; var1edg="AB::BD::AD::AC::BC";
 var1="sol::"+var1pt+"::"+var1edg;  //実行と表示のための変数を指示
 dispfig1(m,n,r):=(  //描画のためのコマンド定義
   Parsevv(var1pt);
   Listplot("1",[A,B,C,A,D]);
   Circledata("1a",[I1,r]); Circledata("1b",[I2,r]);
   Letter([A,"n","A",B,"w","B",C,"e","C",D,"s","D"]);
 );
```

naritasan.cdy の figures スロットを以下のように変更して，スクリーン上部にあるボタン 1 を押せば，図 7 の画面が得られる．

```
mkcmd1();
if(contains(Ch,1),
 Setfiles(Cdyname()+"1");
 var=var1;
 CalcbyMset(var,"mxans1",cmdL1,op);
 Disptex(Pos,1.2,1,
    "sol::"+var1pt);
 Pos=Pos0+
    [6,-Dy*2-0.4];
 Disptex(Pos,Dy+0.4,
    1,var1edg);
 m=tanhalf(50);
 n=tanhalf(65);
 dispfig1(m,n,1.5);
);
```

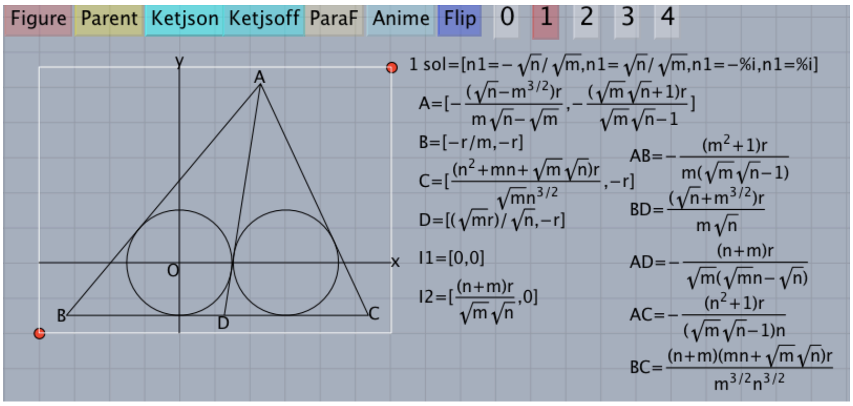



図 7: $m, n, r$ による結果

# 4 成田山新勝寺算額の解法 (2)

授業等で，学生に MNR 法の解法を試みさせる場合は，前節の結果で十分であると考えられる．しかし，文献 [8][9]に書かれている通りに AD を辺の長さで表そうとすると，平方根の処理が必要となる．以下はそのためのスクリプトと計算結果である．

```
mkcmd2():=(
 cmdL2=concat(cmdL1,[
 "assume(c-b-a>0,c+b+a>0)",
 "eq:AB-a; sol:solve(eq,r)",
```

[9]算額では BC を他の辺で表す問となっている ([7])．

```
  "AD:frev(AD,sol)",
  "mp2:frfactor(edg2m(b,a,c)^2); np2:frfactor(edg2m(c,a,b)^2))",
  "mnp2:frfactor(msq*nsq)"; mn:frfactor(sqrt(mnsq))",
  "mpnp2:frfactor(msq+nsq+2*mn)",
  "nu:num(AD); de:denom(AD)",
  "nu:frfactor(nu*(sqrt(m)*sqrt(n)+1))",
  "ADp4:frfactor(ADp2^2)",
  "ADp4:frev(ADp4,[m^2=mp2,n^2=np2,(n+m)^4=mpnp2^2])",
  "ADp2:frfactor(sqrt(ADp4))",
  "end"
  ]);
);
var2="msq::nsq::mnsq::mn::mpnsq::AD::ADsq::AD2n::AD2d::AD2";
```

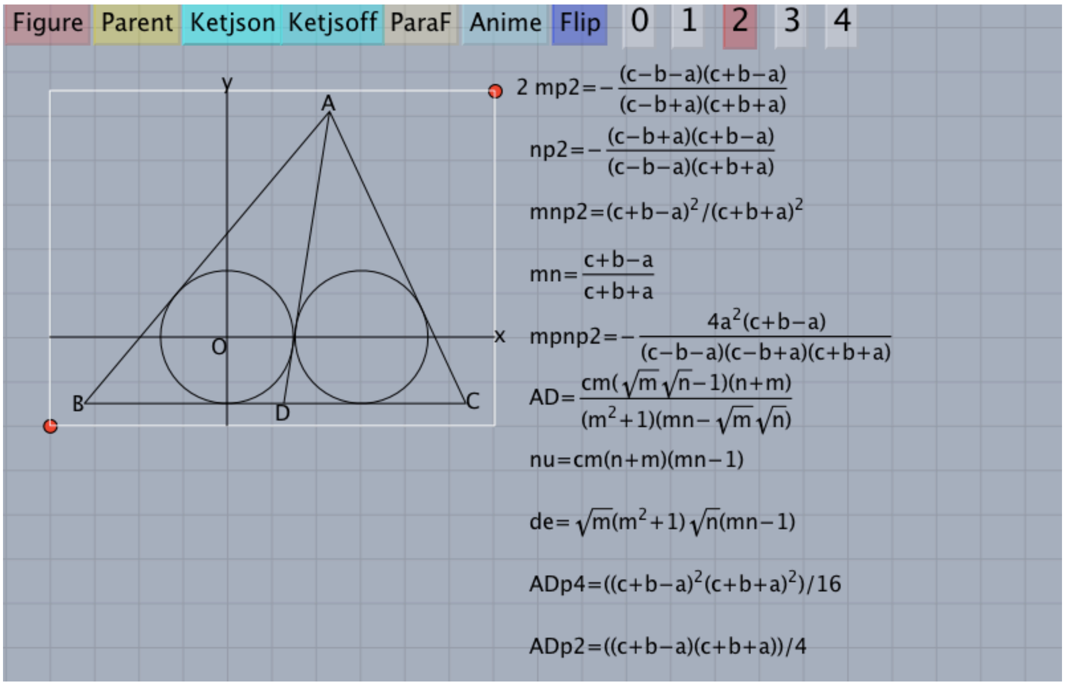



図 8: $\mathrm{AD}^2$ を $a, b, c$ で表す

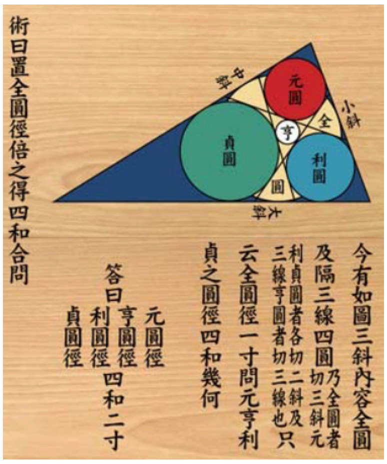
最終行の結果から，文献 [8] の解が次のようにして得られる．

$$\mathrm{AD} = \sqrt{\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{4}} = \sqrt{s(s-a)} \quad (s = \frac{a+b+c}{2})$$

## 5　日本の定理 II の証明 (解法 1)

日本の定理 II(白山神社算額の右側) の問, 答, 術を現代語訳すると次のようになる[10].

[10]和算では径を円の直径とするが，半径と考えてもよい．




問：三角形の中に全円，及び 3 線を隔てて 4 円 (元, 亨, 利, 貞) を入れる．ここで全は三角形に接し，元, 利, 貞は三角形の 2 辺と 3 線に接し，亨は 3 線に接する．全径が 1 寸のとき元, 亨, 利, 貞の円径の和はいくらか．

答：元, 亨, 利, 貞 4 円径の和は 2 寸．

術：全径を 2 倍すると 4 円の和を得て問に合う．

すなわち，外側の三角形と内接円 (全円) をかき，3 線を引いて，残りの 4 円をかくことになっているが，元, 利, 貞の 3 円はいずれも 5 本の線分に接する条件が必要となり，求解が難しくなる[11]．そこで，本節では内部の円 (亨) から始めて，3 円を傍接円として求め，その共通外接線から外側の三角形を作ることにする．

ステップ１ 中の三角形 ABC と亨円を MNR 法でおき，3 傍接円の中心と半径を求める．

```
cmdL1=concat(Mxbatch("mnr"),
   ["putT(m,n,r)","A:vtxT; B:vtxL; C:vtxR; I:inC; r:inR",
    "Ca:exCa; Ra:exRa; Cb:exCb","Rb:exRb; Cc:exCc; Rc:exRc"]);
CalcbyMset(var,"mxans1",cmdL1,op);
```

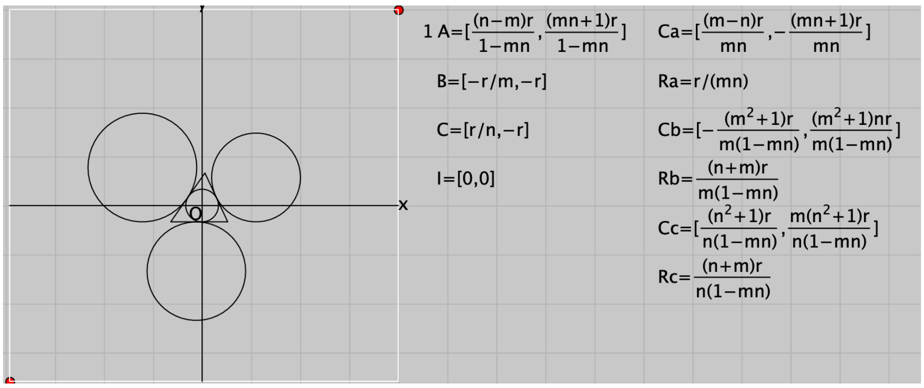



図 9: 亨円と 3 傍接円

ステップ２ 三角形 DEF を円の共通外接線としてえがき，D,E,F を求める．

```
cmdL2=concat(cmdL1,
   ["out:comTan1(Ca,Ra,Cb,Rb); ps1:[out[1],out[2]]",
    "out:comTan1(Cc,Rc,Ca,Ra); ps2:[out[1],out[2]]",
    "out:comTan1(Cb,Rb,Cc,Rc); ps3:[out[1],out[2]]",
    "D:frfactor(meetLine(ps1,ps2)); E:frfactor(meetLine(ps2,ps3))",
    "F:frfactor(meetLine(ps3,ps1))"]);
```

[11] この解法については，次節で述べることにする．

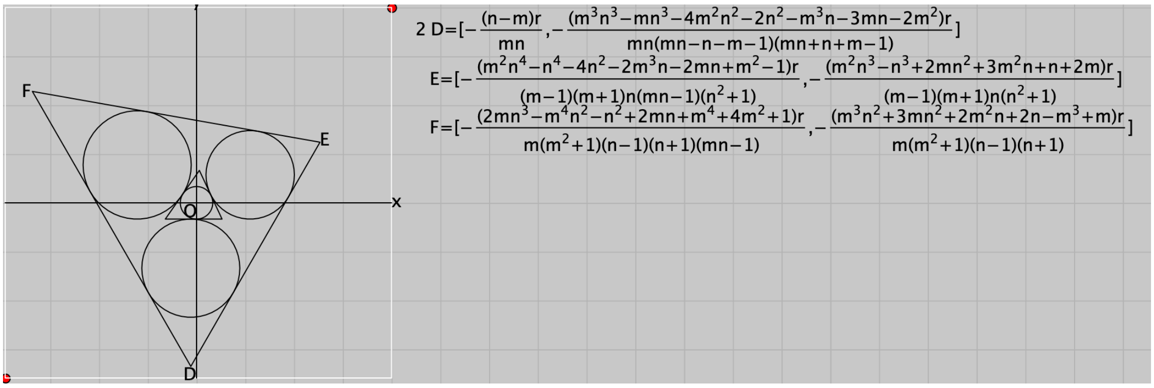


図 10: 共通外接線と三角形 DEF

ステップ３ DEF の各辺を求めて三角形をおき，4 円径の和と内接円の半径を求める．

```
cmdL3=concat(cmdL2,
 "[assume(m>0,n>0,m<1,n<1,m*n-1<0,(m+1)*n+m-1>0)",
  "DE:edge(D,E); EF:edge(E,F); FD:edge(F,D)",
  "mD:edg2m(EF,DE,FD); mE:edg2m(FD,EF,DE); mF:edg2m(DE,FD,EF)",
  "mrotD:cos2m((D[1]-F[1])/FD)",
  "putT(mF,mD,r1);slideT(vtxR,D);rotateT(-mrotD,D)",
  "eq:vtxT[1]-E[1]; sol:solve(eq,r1)",
  "R:frev(r1,sol); CR:frev(inC,sol); r0:r",
  "sum:frfactor(r+Ra+Rb+Rc)"]);
```

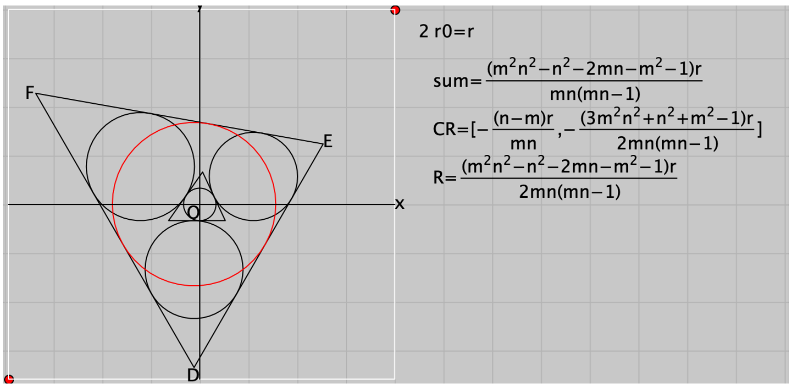


図 11: 4 円径の和 sum と内接円の半径 R

図 11 から，4 円径の和が内接円の半径に等しいことが示された．

本節では，内側の鋭角三角形 ABC から外側の三角形 DEF を構成したが，任意の外側の三角形 DEF に対して 図 10 のような内側の鋭角三角形 ABC が存在することを示す．上の計算により $mE=-\frac{(m-1)(m+1)}{2m}$ ($mE$ は角 $E$ の半角の正接) が導かれるが，この式から $mE>0$ を満たす任意の $mE$ に対し，この式を満たす $0<m<1$ である $m$ が定まる．これは「$0<E<\pi$ を満たす任意の角 $E$ に対して 図 10 の作図となる角 $B$ が $0<B<\frac{\pi}{2}$ を満たすように定まる」ことを意味している．すなわち外側の三角形 DEF の任意の角 $E$ に対して角 $B$ を鋭角として 図 10 の作図が可能である．角 $D,F$ についても同様で，任意の三角形 DEF に対して 図 10 の作図が可能である．

## 6 日本の定理IIの証明(解法2)

本節では，外側の三角形ABCから始める解法を述べる．この場合，連立方程式を解くことが必要となり，その求解と解の選択がポイントになる．以下，いくつかのステップを抜粋して示す．

**ステップ1** 外側の三角形ABCと内接円I1，および同じ内接円をもつAHJをおく．JはHLを延長した直線と直線BCとの交点である．角 $B, C, F, E, J$ を $(m), (n), (m1), (n1), (n2)$ とする．

**ステップ3** KFCと内接円I2，およびAHLの内接円I3をおく．

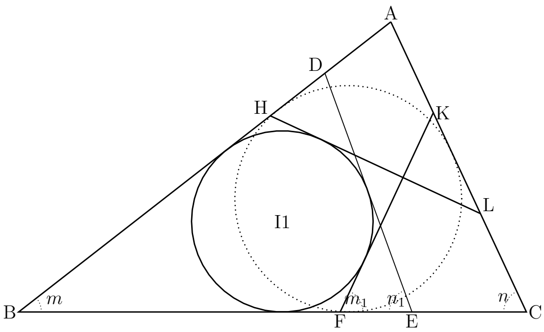



図 12: ステップ1

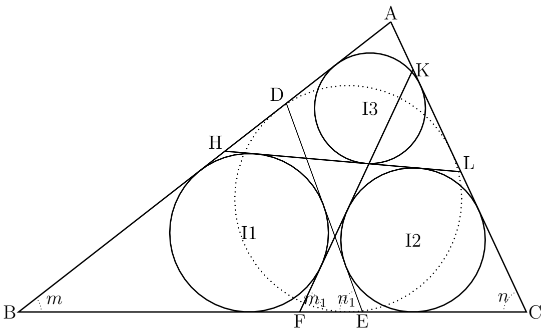
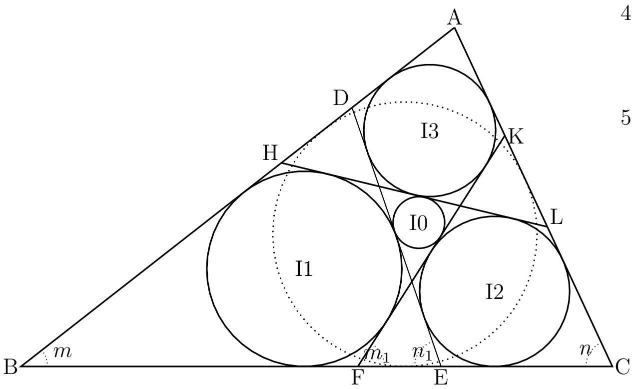



図 13: ステップ3

**ステップ5** 円I3が線分DEとKFに接する条件から連立方程式eq4a,eq4bを作る．これを解くために，グレブナー基底を用いることも考えられるが，MNR法のライブラリに組み込んだ未知数消去の関数reduceD(egree)を用いれば，ひとつの未知数だけを含む方程式を因数分解したものが出力される．

```
eq4a="4*R^2*m1*(n1+m)*(n*n1+1)*(m*m1*n*n1^2+n*n1^2+···
```

ここで，どの因数を用いるかを選択することになるが，結果には図14のように，$\sqrt{m^2+1}$ が含まれている．そこで，四半角の正接を $M, N$ とおくと，$m = \frac{2M}{1-M^2}, \sqrt{m^2+1} = \frac{1-M}{1+M}$ より，$M, N$ についての有理式となる．




4 $ansm1 = \sqrt{n^2+1} - n$

$ansn1 = \sqrt{m^2+1} - m$

5 $r0 = \dfrac{(M-1)(N-1)(N+M)R}{M^2N^2+MN^2+M^2N-2MN+N+M+1}$

$r1 = \dfrac{(M-1)(N+1)(MN-1)R}{M^2N^2+MN^2+M^2N-2MN+N+M+1}$

$r2 = \dfrac{(M+1)(N-1)(MN-1)R}{M^2N^2+MN^2+M^2N-2MN+N+M+1}$

$r3 = \dfrac{(M+1)(N+1)(N+M)R}{M^2N^2+MN^2+M^2N-2MN+N+M+1}$

$S = r0 + r1 + r2 + r3 = 2R$

図 14: HL, DE, KFに接する円I0

よって，$S = r0 + r1 + r2 + r3 = 2R$ であることが得られた．

## 7 まとめと今後の課題

MNR 法は，三角形を含む図形問題を数式処理で解くのに有効な方法である．ただし，時には，四半角を用いるなど，有理式になるための工夫を必要とする．

図 14 の右にあるスクリプトの 1,2 行によれば，

$$m1 = \tan\frac{F}{2} = \sqrt{1+\tan^2\frac{C}{2}} - \tan\frac{C}{2} = \frac{1-\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$n1 = \tan\frac{E}{2} = \sqrt{1+\tan^2\frac{B}{2}} - \tan\frac{B}{2} = \frac{1-\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

となる．これから，$m1, n1$ すなわち角 $F, E$ を与えれば，図 15 のように，鈍角三角形でも図を描くことが可能である．このように，数式処理を利用することで，新たな興味と関心を引き起こすとともに，新しい数学的事実を発見する可能性もあり得る．

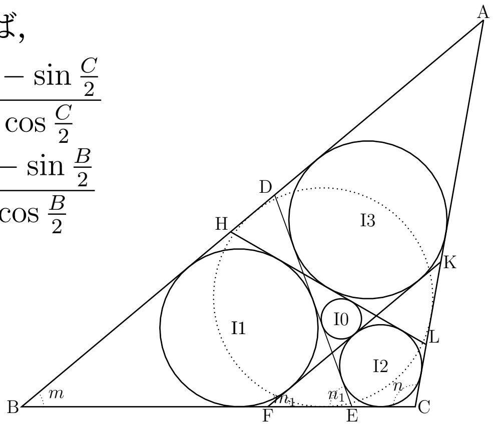



図 15: 鈍角三角形の場合

今後は，和算に限らずにいろいろな図形問題への適用可能性を探るとともに，和算と数式処理を用いた授業プラン，すなわち，円周角の定理や円に内接する四角形の証明などの簡単な例を解くことから始めて，実際の和算の問題へと進む授業プランを策定したいと考えている．空間の MNR 法も興味あるテーマであるが，長期的な課題である．

## 参考文献


[1] Cinderella ダウンロード `https://beta.cinderella.de`

[2] Maxima ダウンロード `https://maxima.sourceforge.io/download.html`

[3] KeTCindy ダウンロード `https://github.com/ketpic/ketcindy`

[4] KeTCindy Home `https://s-takato.github.io/ketcindyorg/indexj.html`

[5] KeTTeX ダウンロード `https://github.com/ketpic/kettex/releases`

[6] 和算の館 `http://www.wasan.jp`

[7] 平山諦監修, 千葉県の算額, 成田山資料館, 1970

[8] 深川英俊, Dan Pedoe, 日本の幾何—何題解けますか—, 森北出版, 1991

[9] 上垣渉, Japanese Theorem の起源と歴史, 三重大学教育学部研究紀要. 自然科学 / 三重大学教育学部 編 52, 23-45, 2001

[10] 涌田和芳, 外川一仁, 新潟白山神社の紛失算額, 長岡高専研究紀要, 47 巻, 2011

[11] S. Takato, H. Makishita, A Method to Prove Japanese Theorems and Others Appeared in Wasan using Maxima, Springer LNAI14991, SCSS 2024, 57-78, 2024