Maximaによる
「日本の定理」の証明と教材化

高遠節夫

芝浦工大・KeTCindy センター

牧下英世

芝浦工大

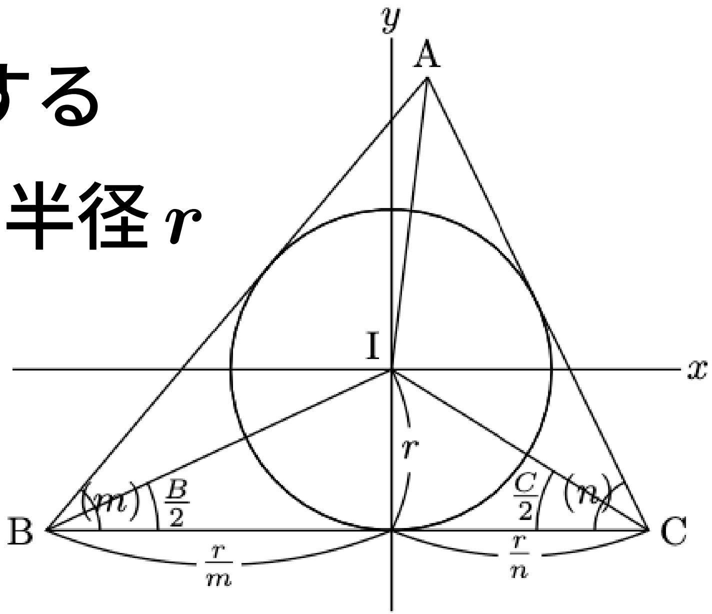
2024.12.18

Maxima の MNR 法ライブラリ

- 数式処理で図形問題を解く
- 条件から連立方程式を作る
- 有理式でないと途端にモタモタする
- 三角形の底角を B, C, 内接円の半径 r

$$m = \tan\frac{B}{2}, n = \tan\frac{C}{2}$$

- 三角形の諸量は m, n, r の有理式で表される



- Maxima のライブラリ mnr.max を作成した

MNR の主なコマンドと関数

ポイントは加法定理と 2 倍角の公式

- 頂点 vtxT,vtxL,vtxR　辺 edgB,edgL,edgR
- 補角 supA，余角 comA　和 plusA，差 minusA
- 内積 dotProd 外積 crossProd 大きさ ^{2} normsq
- 内接円 inC,inR　外接円 cirC,cirR
- putT(m,n,r)　内心を原点に三角形をおく
- slideT(A,B)　A が B になるように平行移動
- rotateT(m,A)　A を中心に (m) 回転
- その他 分数や代入式の簡単化 frfactor,frev

Maxima と KETCindy との連携

- Maxima だけでも実行できる

  batch(パス/mnr.max)

  putT(m,n,r);

  ...

- しかし，図や式を表示確認しながら進めた方がいい

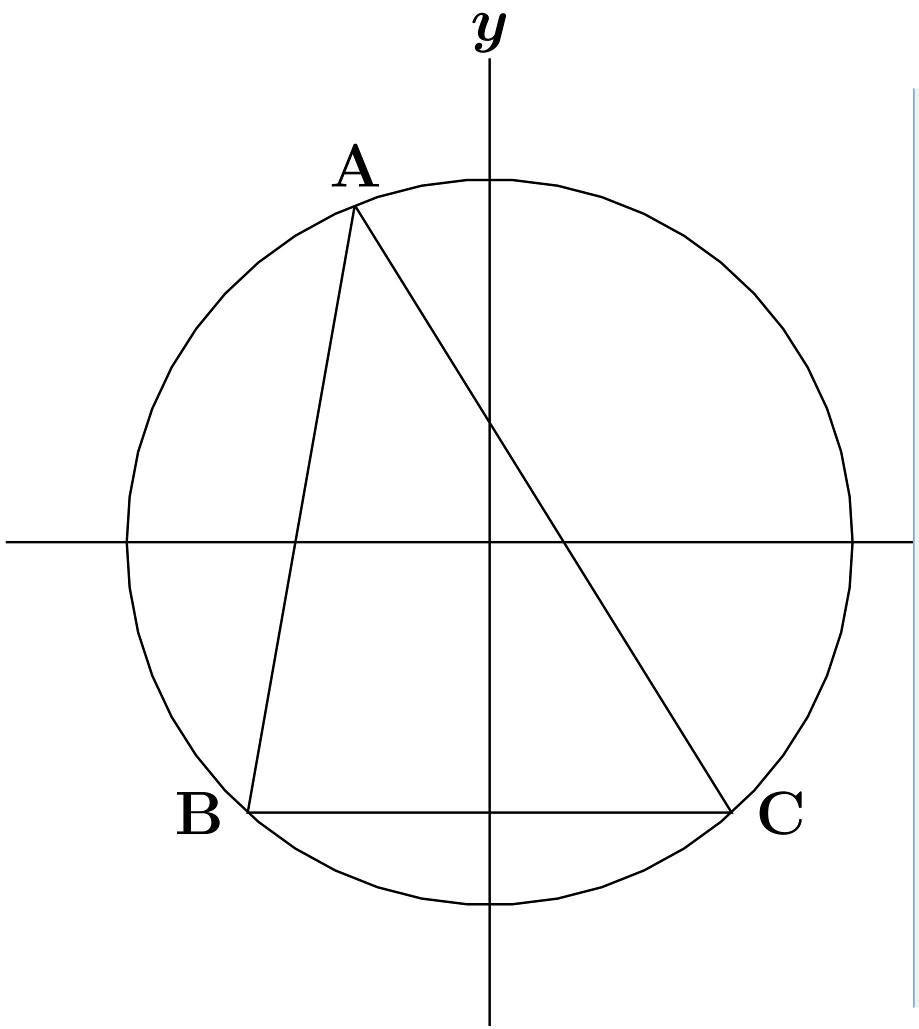
  $\Longrightarrow$ KETCindy から Maxima を呼び出して実行，
  結果を KETCindy に戻す

Asking ChatGPT ‘What is ketcindy’

Cinderella Support: By working with Cinderella, a dynamic geometry software, Ketcindy facilitates the creation of interactive and dynamic mathematical figures. Customizability: Users can script or program their graphics for complex or custom requirements. Advanced mathematical plots and geometric constructions can be created with fine control over details. For Education and Research: Frequently used by mathematicians, educators, and researchers who need to generate publication-ready graphics.

- TEX 用の (正確で美しい) 図を対話的に作成できる
- デモ 0graph.cdy

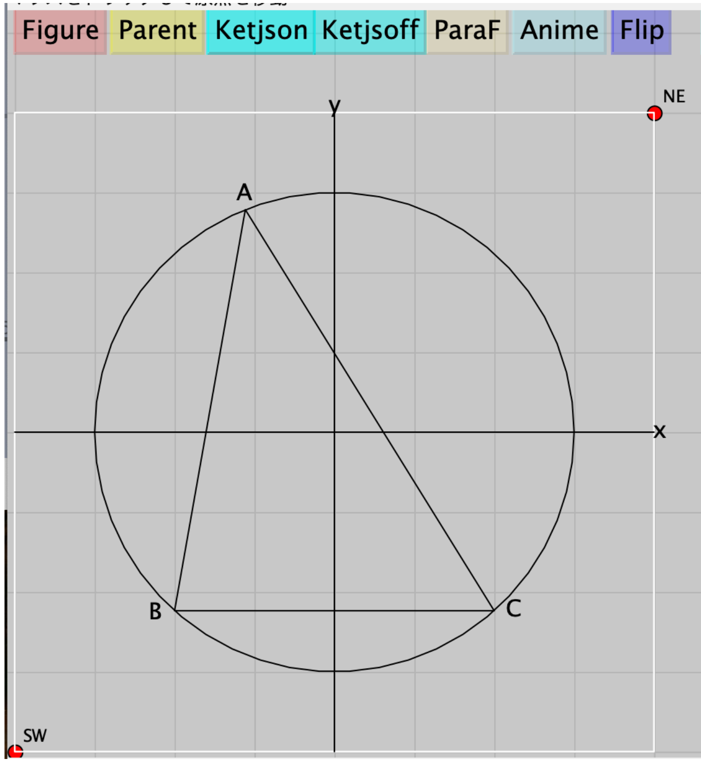
実践例 1. 円周角




```
Ketinit();
cmdL1=concat(Mxbatch("mnr"),[
  "putT(m,n,r); slideT(cirC,[0,0])",
  "aA:supA(plusA(m,n))",
  "eq1:edgB-a; eq2:cirR-R",
  "sol:solve([eq1,eq2],[n,r])",
  "v:frevL([vtxT,vtxL,vtxR,n,aA],sol[2])",
  "A:v[1]; B:v[2]; C:v[3]; n:v[4]; aA:v[5]",
//  "pf:partfrac(aA,m)"
]);
var1="A::B::C::n::aA::pf";
CalcbyMset(var1,"ans1",cmdL1,[""]);
//Disptex(NE+[1,0],1.2,var1);
v=Parsev(var1);
Listplot("1",v_[1,2,3,1]);
Circledata("1",[[0,0],R]);
Letter([v_1,"n2","A",v_2,"w3","B",v_3,"e3","C"]);
Windispg();
```

デモ 1enshukaku.cdy

実践例 1. 円周角



$$A=[\frac{\sqrt{4R^2-a^2}(4Ram^7+(32R^2-3a^2)m^6-16Ram^5+(-(5a^2)-32R^2)m^4-12Ram^3-a^2m^2+8Ram+a^2)+(a^3-8R^2a)m^7}{\sqrt{4R^2-a^2}(8Rm^7+2am^6+16Rm^5+6am^4+8Rm^3+6am^2+2a)+(2a^2-16R^2)m}$$

$$B=[-(a/2),-(\frac{\sqrt{4R^2-a^2}((a^2-8R^2)m^3-2Ram^2+a^2m+2Ra)+(16R^3-4Ra^2)m^3+(4R^2a-a^3)m^2-a^3+4R^2a}{\sqrt{4R^2-a^2}(8Rm^3+2am^2+2a)+(2a^2-16R^2)m^3-4Ram^2+2a^2m+4Ra})]$$

$$C=[a/2,-(\frac{\sqrt{4R^2-a^2}((a^2-8R^2)m^3-2Ram^2+a^2m+2Ra)+(16R^3-4Ra^2)m^3+(4R^2a-a^3)m^2-a^3+4R^2a}{\sqrt{4R^2-a^2}(8Rm^3+2am^2+2a)+(2a^2-16R^2)m^3-4Ram^2+2a^2m+4Ra})]$$

$$n=\frac{\sqrt{4R^2-a^2}(m^2+1)-2Rm^2+2R}{am^2+4Rm+a}$$

$$aA=-(\frac{\sqrt{4R^2-a^2}m-2Rm-a}{am+\sqrt{4R^2-a^2}+2R})$$

$$pf=-((\sqrt{4R^2-a^2}-2R)/a)$$

実践例 2. 双心多角形

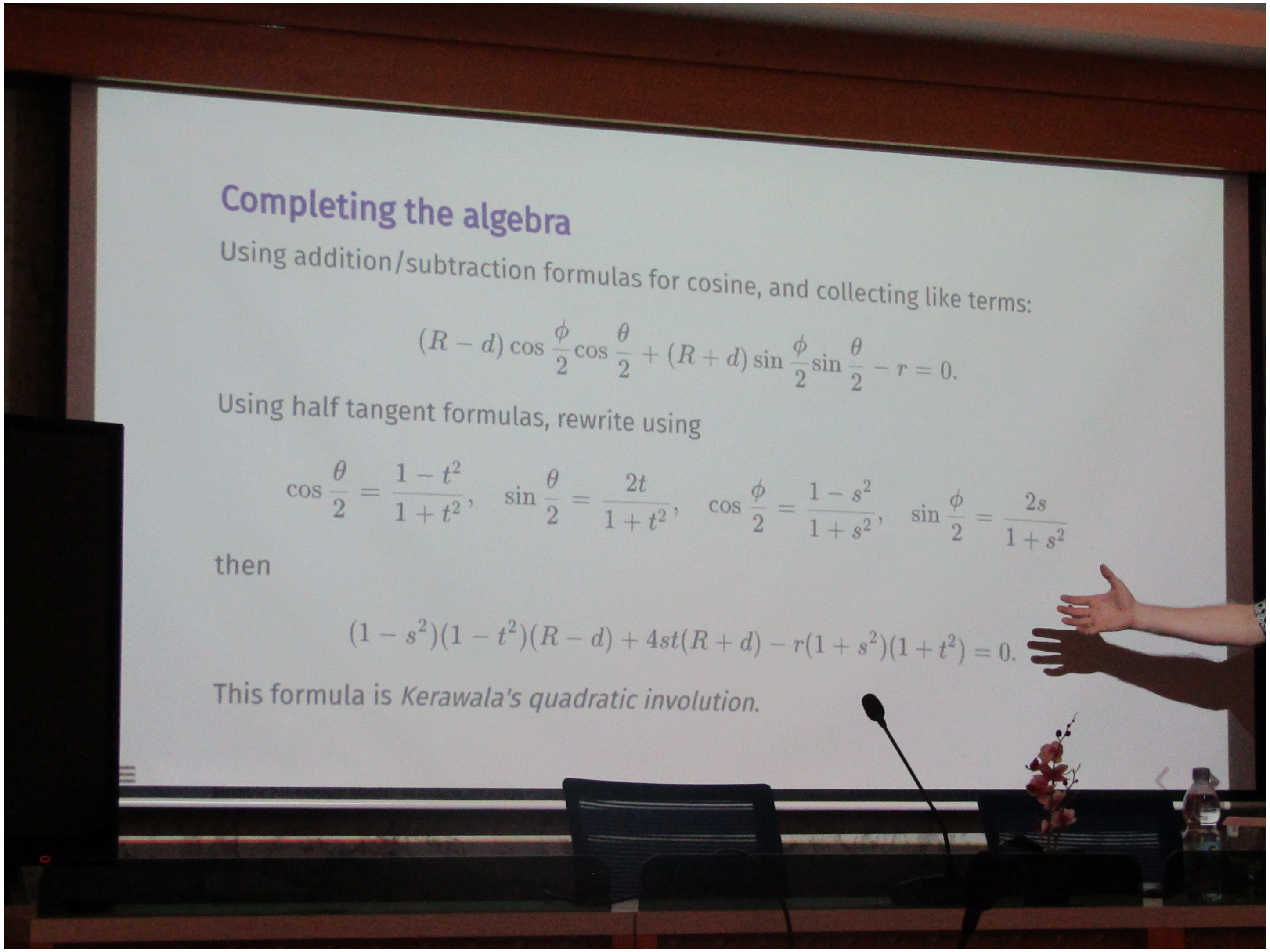
- 内接円と外接円の両方を持つ多角形
- ATCM2024(12/7-11)* で A.McAndrew 氏 (オーストラリア) の招待講演を聞いた

Polynomials associated with bicentric polygons

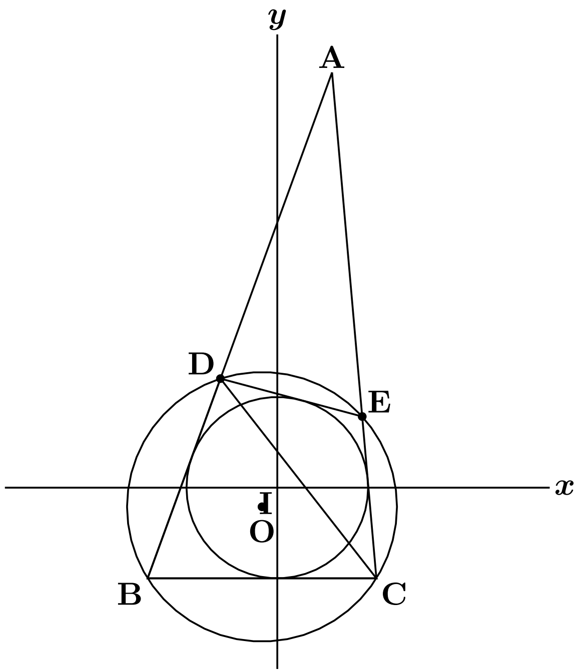
* Asian Technology Conference in Mathematics

- 双心多角形: 内接円と外接円をともに持つ多角形

McAndrew のスライドから



双心 4 角形と MNR 法



$len = 6$

$sol = [n1 = -(\frac{\sqrt{m^2+1}\sqrt{(m^2+1)n^4+4mn^3+(2m^2+2)n^2+4mn+m^2+1}+(m^2-1)n^2 \cdots}{2mn^2+2n}$

$n1 = -(\frac{\sqrt{m^2+1}\sqrt{(m^2+1)n^4+4mn^3+(2m^2+2)n^2+4mn+m^2+1}+m^2n^2-n^2+2mn \cdots}{2n(mn+1)}$

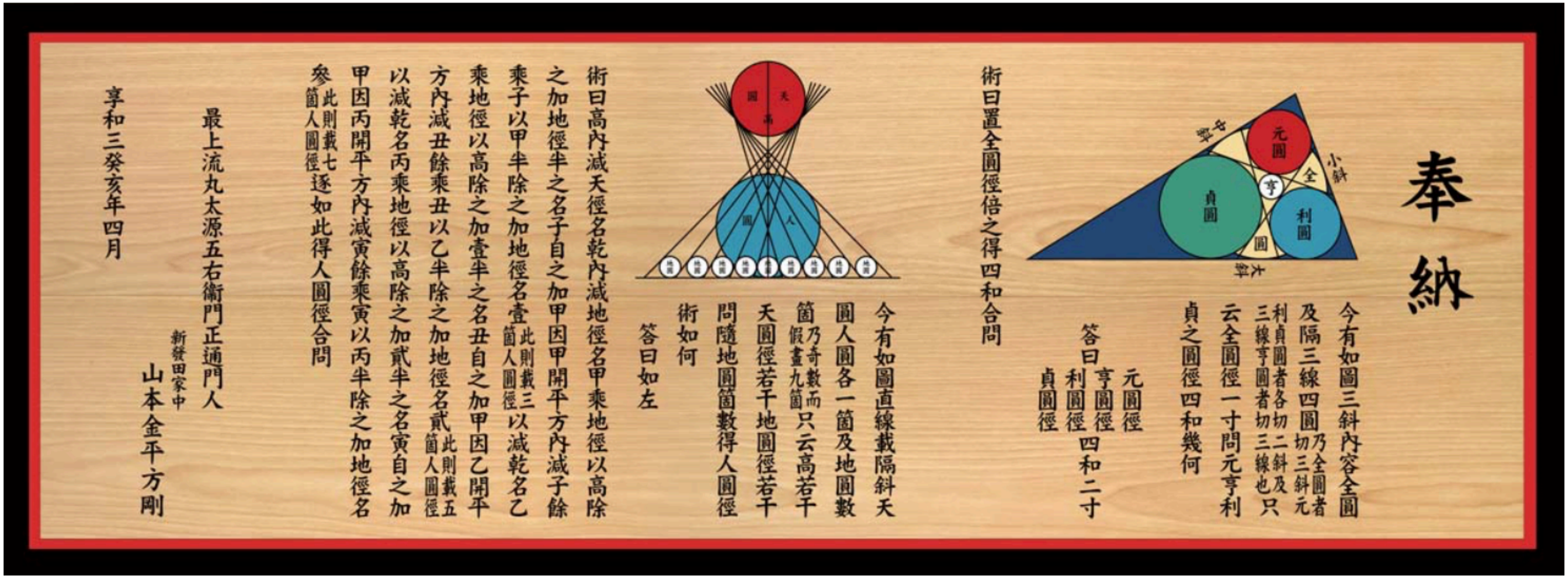
$D = [-(\frac{(m^2n-n+2m)r}{m^2+1}), \frac{(2mn-m^2+1)r}{m^2+1}]$

$E = [\frac{(mn^2+2n-m)r}{n^2+1}, -(\frac{(n^2-2mn-1)r}{n^2+1})]$

$O = [-(\frac{(n-m)r}{2mn}), \frac{(m^2n^2+n^2-2mn+m^2-1)r}{4mn}]$

$R = -(\frac{(m^2\sqrt{m^2+1}n^2\sqrt{(m^2+1)n^4+4mn^3+(2m^2+2)n^2+4mn+m^2+1}-\sqrt{m^2+1}n^2 \cdots}{\cdots}$

白山神社の紛失算額 (日本の定理 II)



- 涌田和芳・外川一仁, 新潟白山神社の紛失算額, 長岡高専研究紀要 47,2011
- 癸亥 (きがい)= 1803

https://s-takato.github.io/ketcindyorg/offline24/kettaskveto.html

日本の定理 II の HTML 教材化

- KETCindyJS：KETCindy から HTML を作成
- 「ketcindy」または「ketcindy home」で検索

. KeTMath とKeTLTS(KeTLMSを名称変更)

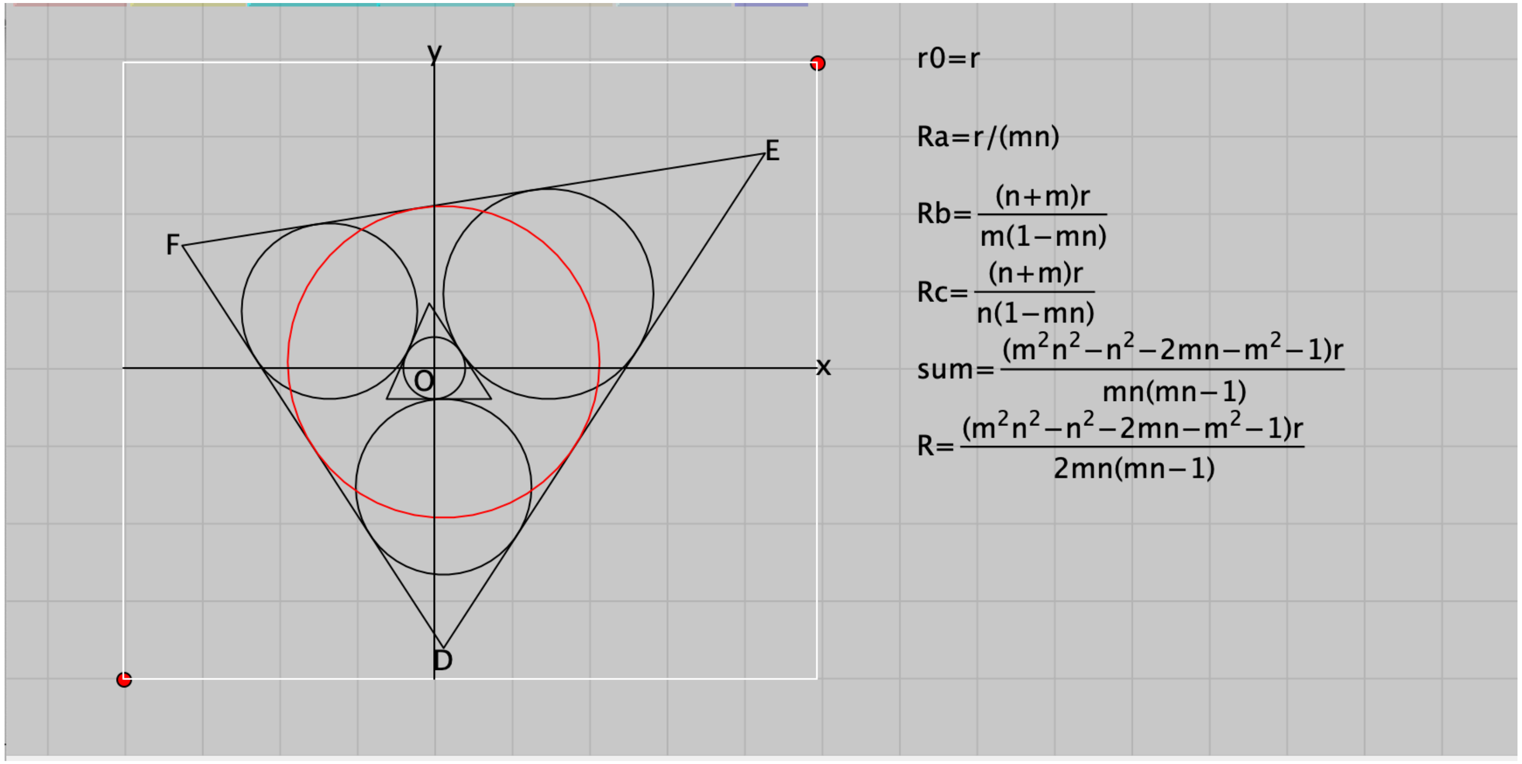
- KeTMath 1次元簡易数式を2次元数式で表示するWebアプリ
- KeTMathMax 1次元簡易数式をMaxima数式でも表示するWebアプリ
- KeTLTSオンライン型授業システムの使い方の説明です
- KeTLTSのファイル１式がダウンロードできます
- サンプル

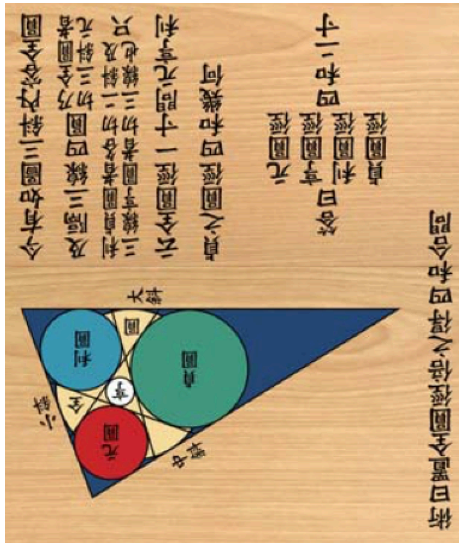
1. 2307-1im pngの読み込み
2. 202-6dr Napier数
3. 0831-1dr 鞍点
4. 2307-3dr Atwood machine
5. 1007-1d 斜方投げ上げ
6. kettaskv2-1d 日本の定理II
7. kettaskveto 干支速算

https://s-takato.github.io/ketcindyorg/offline24/kettaskv2-1d.html

日本の定理 II の MNR 解法

- デモ 3Japanesetheorem2.cdy





結論

(1) MNR 法は平面図形の問題を数式処理で解くときに相当に有効である

(2) 題意を適切に数式に表す力と慣れが必要となる

(3) コマンド記述法と UI に改善の余地がある

(4) 空間図形については今後の課題である

ご清聴ありがとうございました