

和算のmnr解法における工夫 と AIの利用

高遠 節夫

KeTCindy センター
日本数学教育学会名誉会員
城西大学数学教育セミナー

2026.02.28

和算の問題と mnr 法

mnr 法と Maxima による解法

- 和算の問題を解くのは結構大変
- 和算家の卓越した計算力と知識が必要
算額の問題の答と術は簡単にしか書かれていない
- Maxima で解くことを試みた
⇒ 無理式が現れて計算は破綻
- mnr 法
三角形の2底角の正接 $m = \tan B/2, n = \tan C/2$
と内接円の半径 r を用いる
⇒ 三角形の諸量は m, n, r の有理式となる

KeTCindy

- 動的幾何 Cinderella2(Cindy) のライブラリ
- TeX の描画コード (主に pict2e) ファイルを対話的に生成

$\text{KeTCindy} = \text{KeTpic} + \text{Cindy}$

$\text{KeTpic} = \text{Kisarazu Educational Tpic}(\text{Takato})$

- Maxima(,R,GCC) を KeTCindy から実行して, 結果を KeTCindy で利用できる
- mnr 法のためのコマンドとテンプレートを作成

mnr 法の主なコマンド

- 基本コマンド

`putT(m,n,r)` 内心を原点にして三角形をおく

`slideT(p1,p2)` p_1 が p_2 に一致するように平行移動

`rotateT(m,p)` p の周りに (m) だけ回転

- 式変形の主なコマンド

`numer(f),denom(f)` 分子分母を因数分解

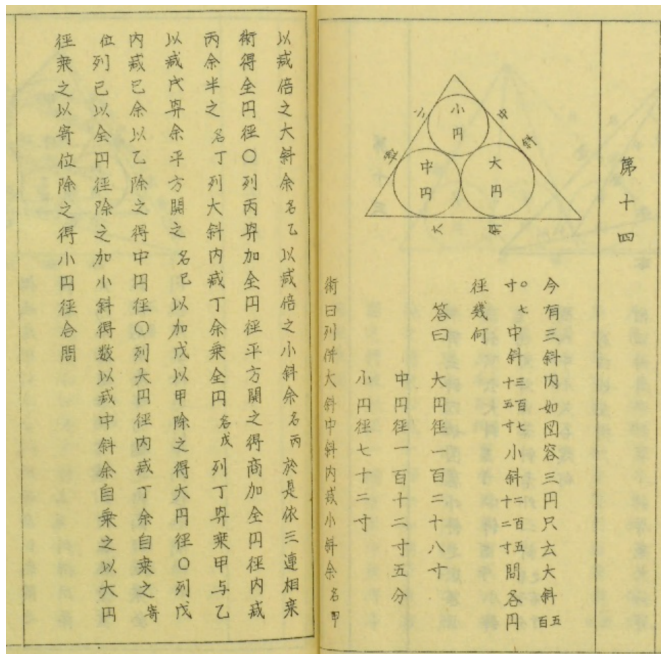
`frfactor(f)` 分数を簡単化

`frev(eq,rep)` eq に rep を代入して簡単化

Malfatti 円 (三斜三円術)

問題

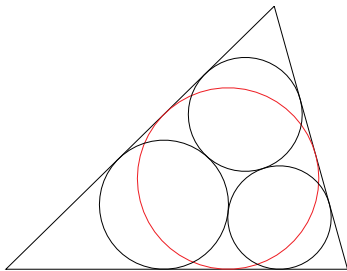
- 安島直円
不朽算法
日下誠
1799年
写本現存



問題

問 今有如三斜内容緑円及青白浅青
 円只浅青径若干白径若干青径若
 干問得緑径術如何

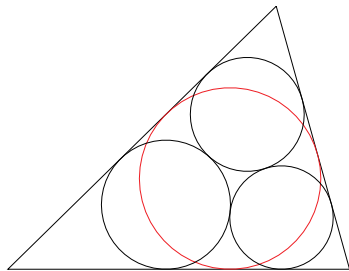
岐阜県明星輪寺算額 1865



問題

問 今有如三斜内容緑円及青白浅青
 円只浅青径若干白径若干青径若
 干問得緑径術如何

岐阜県明星輪寺算額 1865



- 大村一秀の解 (聖なる数学英語版 P216-218)

算法点竄手引草, 1841

$$r = \frac{\sqrt{r_1 r_2 r_3} [\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} + \sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)}]}{\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_1 r_3} + \sqrt{r_2 r_3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} - \sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)}}$$

ketcindy home で検索

Step1 の mkmcmd と cdy(Figures)

```

mkmcmd1():=(
cmdL1=concat(Mxbatch("mnr"),[
"putT(m,n,r)",
"A:vtxT; B:vtxL; C:vtxR; I:inC",
"putT(m,n,s1*r); slideT(vtxL,B)",
"D:vtxT; Eb:vtxR; I1:inC",
"putT(m,n,s2*r); slideT(vtxR,C)",
"G:vtxT; Ec:vtxL; I2:inC",
"putT(m,n,s3*r); slideT(vtxT,A)",
"H:vtxL; J:vtxR; I3:inC",
"eq1:numer(lenSeg2(I1,I2)-(s1*r+s2*r)^2)",
"eq2:numer(lenSeg2(I2,I3)-(s2*r+s3*r)^2)",
"eq3:numer(lenSeg2(I3,I1)-(s3*r+s1*r)^2)",
"eq1:eq1/r^2",
"eq2:eq2/r^2",
"eq3:eq3/r^2",
"endstep"
]);
);

```

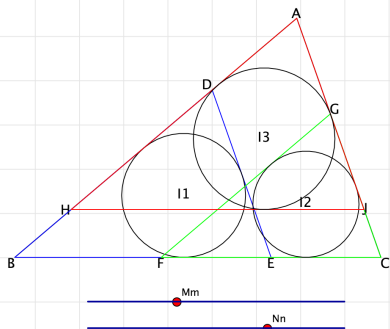
```

mkmcmd1();
if(contains(Ch,1),
Setmnrstep(1);
CalcbyMset(var1,"mxans1",cmdL1,op(5));
Disptex(Pos,Dy*0.75,1,var1);
s1=0.7; s2=0.6; s3=0.8;
Parsevv(var1);
dispfig1();
);

```

Step1 を実行した cdy 画面

Figure Parent Ketjson Ketjsoff ParaF Anime Flip



$$m=0.37, n=0.71$$

0 1 2 3 4 5 6 7

$$\bullet \text{NE } 1 \text{ A:} \left[\frac{(n-m)r}{1-mn}, \frac{(mn+1)r}{1-mn} \right]$$

$$\text{B:} [-r/m, -r]$$

$$\text{C:} [r/n, -r]$$

$$\text{I:} [0, 0]$$

$$\text{D:} \left[\frac{(m^2-1)rs1+(1-mn)r}{mn-1}, -\frac{(2rs1+(mn-1)r)}{mn-1} \right]$$

$$\text{Eb:} \left[\frac{(n+m)rs1-\frac{m^2n-m}{nr}}{mn}, -r \right]$$

$$\text{G:} \left[-\frac{\frac{mn}{(n^2-1)rs2+(1-mn)r}}{mn-1}, -\frac{(2rs2+(mn-1)r)}{mn-1} \right]$$

$$\text{Ec:} \left[-\frac{(n+m)rs2-\frac{m^2n-m}{nr}}{mn}, -r \right]$$

$$\text{H:} \left[-\frac{(m^2-1)rs3+(mn-m^2)r}{mn-1}, \frac{2rs3+(-(mn-1)r)}{mn-1} \right]$$

$$\text{J:} \left[\frac{(n^2-1)rs3+\frac{m^2n-m^2}{nr}}{mn^2-n}, \frac{2rs3+(-(mn-1)r)}{mn-1} \right]$$

$$\text{I1:} [(rs1-r)/m, rs1-r]$$

$$\text{I2:} [-(rs2-r)/n, rs2-r]$$

$$\text{I3:} \left[\frac{(n-m)rs3+(m-n)r}{mn-1}, \frac{(mn+1)rs3+(-(mn-1)r)}{mn-1} \right]$$

$$\text{eq1:} m^2s2^2 - 4m^2n^2s1s2 + 2mns1s2 - 2mns2 - 2m^2s2 + n^2s1^2 - 2n^2s1 - 2mns1 + n^2 + 2mn + m^2$$

$$\text{eq2:} n^4s3^2 + 2mn^3s3^2 + m^2n^2s3^2 - 4m^2n^4s2s3 + 6mn^3s2s3 - 2m^2n^2s2s3 - 2n^2s2s3 + 2mns2s3 - 2m$$

$$\text{eq3:} m^2n^2s3^2 + 2m^3ns3^2 + m^4s3^2 - 4m^4n^2s1s3 - 2m^2n^2s1s3 + 6m^3ns1s3 + 2mns1s3 - 2m^2s1s3 - 2$$

mnr 解法での工夫と着想

- 最初は有理式で計算される
- 途中で4次方程式が出る
- 解は求まるが、根号の複雑な式(32個)
- よく見ると、 $\sqrt{1+m^2}$ の式が出ている

$$\sqrt{1+m^2} = \frac{1}{\cos B/2}$$

⇒ 四分角の正接 M, N の有理式

- M, N に置き換えることで解を得ることができた

RIMS202511 「数式処理の理論と応用」で発表

mnr 解法での工夫と着想

- 最初は有理式で計算される
- 途中で4次方程式が出る
- 解は求まるが、根号の複雑な式(32個)
- よく見ると、 $\sqrt{1+m^2}$ の式が出ている

$$\sqrt{1+m^2} = \frac{1}{\cos B/2}$$

⇒ 四分角の正接 M, N の有理式

- M, N に置き換えることで解を得ることができた

RIMS202511 「数式処理の理論と応用」で発表

⇒ 最初から(または早い段階で) M, N を使えばどうか

mnr 解法修正版

- 早い段階で M, N で置き換えることにする

mnr 解法修正版

- 早い段階で M, N で置き換えることにする
しかし、最初からだと式が長大になりすぎる

mnr 解法修正版

- 早い段階で M, N で置き換えることにする

しかし、最初からだと式が長大になりすぎる

⇒ 式を見ながら、適切なタイミングで

mnr 解法修正版

- 早い段階で M, N で置き換えることにする
 - しかし、最初からだと式が長大になりすぎる
 - ⇒ 式を見ながら、適切なタイミングで
- Maxima のスクリプトが複雑になり、ミスが見つかりにくい

エラーが出た時の対応に苦勞する

mnr 解法修正版

- 早い段階で M, N で置き換えることにする
 - しかし、最初からだと式が長大になりすぎる
 - ⇒ 式を見ながら、適切なタイミングで
- Maxima のスクリプトが複雑になり、ミスが見つかりにくい
 - エラーが出た時の対応に苦勞する
 - ⇒ Gemini Pro との対話で進めることにした

Gemini との対話

対話 1 ライブラリの確認

User: 和算図形問題を KeTCindy と Maxima で解きたい
専用ライブラリ (`ketcindylib`, `mnr.max`) の認知確認
未知の場合, ファイル添付の提案

Gemini: 協力の申し出と懸念

KeTCindy や Maxima の一般的な文法は熟知
特定ライブラリの内部定義は未学習の可能性大
具体的な関数仕様やデータ形式の確認要望
⇒ ファイルアップロード (添付) の依頼

対話 2：提案された進め方

Gemini: ファイル受領後のサポート手順提案

1. ライブラリの解析

`mnr.max` 等の定義読込，利用可能関数の特定

2. 問題の定式化

和算問題を Maxima で解ける連立方程式へ定式化

3. スクリプト作成

図形描画 (KeTCindy) と計算 (Maxima) の連携コード提示

最初の壁：Grobner 基底

User: 提案コードを実行したがうまくいかない

gb (Grobner 基底) が計算されず変数のまま残る
リストの途中に end タグが含まれている

Gemini: 原因特定と方針転換

1. end タグが Maxima の読み込みを中断させていた
2. Malfatti の問題は Grobner 基底では計算量爆発

Gemini: 新しいアプローチ

計算コストの高い Grobner 基底を諦める
確実に解ける消去法 (reduceD) へ切り替える
end タグを自動削除する処理を追加する

消去法の調整

User: reduceD の試行錯誤

変数が消えずに残存 (s_2 など)
中間式が長大で計算終わらず

Gemini: パラメータの調整

消去の反復回数 (ステップ数) 不足
⇒ 回数を 8 → 30 に大幅増
計算成功も，多大な時間を要す

巨大な式の処理

User: 巨大な式 (val13) の取得

計算時間短縮のため結果の直書きを希望
式が巨大で扱いが困難

Gemini: 実装の提案

直書き (ハードコーディング) に賛同
巨大な式 (4次 × 4次 × 2次) の因数分解
 s_1 の解 (2次式) を自動抽出するコード作成

構文エラーとの戦い

User: エラーで値が出ない

KeTCindy から Maxima への送信時パースエラー発生
文字列 (" - ") の判定失敗

Gemini: 原因の特定

原因はスクリプト内の「文字列」

KeTCindy 内での " (ダブルクォーテーション) 使用
による誤動作

User: 修正もエラー継続

エスケープ処理等試行も解決せず

解決策の提案と中断

Gemini: 解決策 (文字列回避)

「文字列比較」自体を回避

Maxima の `args()` 関数利用

⇒ 因数リスト直接取得による符号判定・文字列操作回避

User: 結果

提案コードを実行するもエラー継続

一旦休憩 (散歩) のため作業中断

完全な解決は次回のチャットへ持ち越し

大村の公式の完全導出

公式の検証と不一致

User: Step6: 大村の公式の検証

公式が成り立つか *checkomura* を計算

Gemini: 結果の分析

$$checkomura : 2(MN - 1) \neq 0$$

$MN \neq 1$ のため、厳密には一致しない

公式の適用形か符号に課題あり

User: 方針の大転換

公式を「確かめる」のではなく「導く (作りたい)」

条件式から r を構成するアプローチへ

数式処理による導出：消去法

Gemini: 変数消去の戦略

Maxima の `eliminate` と `reduceD` を駆使
変数 M, N を消去し, r, r_1, r_2, r_3 の関係式を導く

User: 実行結果

因数分解されない 12 次の斉次多項式が出現
 r については 8 次式

Gemini: 次数の意味

大村の公式 (二重根号) を有理化した形と次数が一致
⇒ 成功の証. $\sqrt{r} = t$ 等の置換で次数下げを提案

対称性による真の解の特定

User: 2つの解の出現

$t (= \sqrt{r})$ への置換後, 方程式から2つの解候補

1. $eq2Mt2a$: 係数に $t_2t_3 + t_1t_3 + t_1t_2$ (対称)
2. $eq2Mt2b$: 係数に $t_2t_3 - t_1t_3 - t_1t_2$ (非対称)

Gemini: 判定基準

図形の性質から「対称性」を重視

添字を入れ替えても不変な $eq2Mt2a$ が真の解

⇒ これを解いて大村の公式と比較する

結論：1841年の公式の再発見

User: 最終確認

対称な解を r について解く

Gemini: 大村の公式との一致

導出された式：

$$r = \frac{t_1 t_2 t_3 (\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} + t_1 + t_2 + t_3)}{t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1}$$

これは大村一秀 (1841) の公式を有理化したものと一致
⇒ 検証ではなく，計算機による公式の自動導出に成功

結論：1841年の公式の再発見

User: 最終確認

対称な解を r について解く

Gemini: 大村の公式との一致

導出された式：

$$r = \frac{t_1 t_2 t_3 (\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} + t_1 + t_2 + t_3)}{t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1}$$

これは大村一秀 (1841) の公式を有理化したものと一致

⇒ 検証ではなく，計算機による公式の自動導出に成功

Human-AI Collaboration の成果である！

結論と今後の展望

結論：Human-AI Collaboration の成果

User: 発表の価値はあるか

Gemini: Automated Derivation (自動導出)

既知の公式の「検証 (Verification)」ではない
初期条件から複雑な公式を「再発見・構成」した
数式処理による定理の自動導出の実例として高く評価
される

Gemini: Human-in-the-loop の実践

計算機任せにせず，人間が指針 (対称性・次数下げ) を
与える
人間とマシン (AI) の理想的な協働モデル
最先端の「AI支援型数学研究」の事例

和算と現代技術の融合・技術的知見

Gemini: 和算 (Wasan) と 21 世紀の現代技術の融合

1841年の公式が KeTCindy, Maxima, AI で解明
数式処理の応用として聴衆の好奇心を刺激する

Gemini: 複雑な数式の処理ノウハウ

eliminate だけでなく自作の reduceD の活用
幾何学的問題の数式処理における実践的知見

Gemini: 結論

単なる問題解決に留まらない方法論の提示
「数式処理システムを使いこなし未知の結果を導く」
自信を持って世界へ発信すべき成果である！

謝辞

本研究の遂行にあたり,以下の方々に深く感謝の意を表します

- | | |
|---------------------|---------------------------------|
| Gemini Pro さん (3.0) | 惜しげもなく全面協力し,難解な数式処理を共に解決へ導いてくれた |
| U.Kortenkamp さん | Cinderella2 の主要開発者 |
| 西浦孝治さん | mnr 法の共同研究者 |
| 久保康幸さん | KeTSlide の LuaLaTeX 化を共同で開発した |
| Mailing List のメンバー | KeTCindy を長年にわたり支え続けている方々 |