数式処理と動的幾何のプログラムの連携による図形問題の解法と教育利用

髙遠節夫

KeTCindy センター

日本数学教育学会名誉会員

JSSAC-E

2025.08.26

和算の問題と数式処理

和算の図形問題

- 算額の問題の答と術は簡単にしか書かれていない

Fig.1 福島県郡山市見度神社 (1986)

- 右から 4 番目は以下の問題 2.1.7 として掲載

  深川・ペドー「日本の幾何—何題解けますか」森北出版 1991

問・答・術の例

(問) 今有如図三角内以三等斜作内三角容等円四只云外三角辺若干問得容三角辺如何

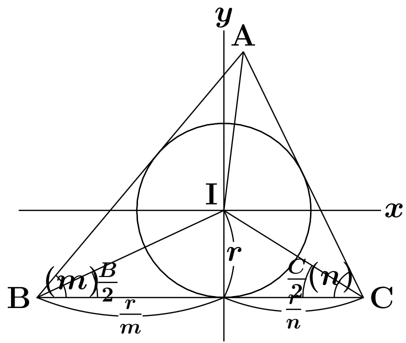
(答) 答曰如左術

(術) 術曰置二十一個開平加三個以除外辺三倍之得内辺合問

$$\text{内辺} = \frac{3\,\text{外辺}}{3+\sqrt{21}}$$

- 数式処理で解こうとしても，無理式が現れるため求解が難しい
- そこで mnr 法を開発した

mnr 法の開発



- $m = \tan\frac{B}{2}, n = \tan\frac{C}{2}$

  $r =$ 内接円の半径

  $\angle B = (m),\ \angle C = (n)$ と記述

- 三角形の諸量は $m,\ n,\ r$ の有理式で表される

  vtxL:$(-\frac{r}{m}, -r)$, vtxR:$(\frac{r}{n}, -r)$, vtxT:$\left(\frac{r(n-m)}{1-mn}, \frac{1+mn}{1-mn}\right)$

  edgB:$\frac{r}{m} + \frac{r}{n}$, edgL$= \frac{r(1+m^2)}{m(1-mn)}$, edgR:$\frac{r(1+n^2)}{n(1-mn)}$

  内接円 inC, inR, 外接円 cirC, cirR

  傍接円 exCa, exRa, exCb, exRb, exCc,exRc

mnr 法の主コマンド

- 基本コマンド

  putT(m,n,r) 内心を原点にして三角形をおく

  slideT(p1,p2) p1 が p2 に一致するように平行移動

  rotateT(m,p) p の周りに (m) だけ回転

- 式変形の主なコマンド

numer(f),denom(f)	分子分母を因数分解
frfactor(f)	分数を簡単化
frev(eq,rep)	eq に rep を代入して簡単化
ratden(s,x,a)	分母の有理化 (x=sqrt(a))

図形のための主なコマンド

- 角の変換

  supA(m),comA(m) 補角と余角

  plusA(m1,m2),minusA(m1,m2) 角の和と差

  timesA(nn,m) 角の整数倍

- その他

  dotProd(v1,v2),crossProd(v1,v2) 内積と外積

  lenSeg2(p1,p2) 距離の平方

  meetLine(pts1,pts2) 交点

  comTan1,comTan1C 共通外接線, 共通内接線

Maxima ライブラリの作成

- mnr.max(普通は mac)
- 全体の行数は約 500 行

プログラミングの重要性１

```
supA(m):=ratsimp(1/m)$ /*hokaku*/
comA(m):=ratsimp((1-m)/(m+1))$ /*yokaku*/
plusA(m1,m2):=ratsimp((m1+m2)/(1-m2*m1))$
minusA(m1,m2):=ratsimp((m1-m2)/(1+m2*m1))$
timesA(nn,m):=block([k,mm],
  mm:m,
  for k from 2 thru nn do mm:plusA(mm,m),
  return(mm)
)$
edg2m(c,a,b):=block(
  [cs,out],
  cs:(a^2+b^2-c^2)/(2*a*b),
  out:sqrt(frfactor((1-cs)/(1+cs))),
  out:frfactor(out)
)$
m2edg(m,a,b):=block(/*250311*/
  [cs,out],
  cs:(1-m^2)/(1+m^2),
  out:sqrt(frfactor(a^2+b^2-2*a*b*cs)),
  out:frfactor(out)
)$

cos2m(c):=block(
  [out],
  out:sqrt(frfactor((1-c)/(1+c))),
  out:frfactor(out)
)$
```

KeTCindy の外部呼び出し

- KeTCindy は動的幾何 Cinderella2(以下 Cindy) の関数ライブラリ (約 29800 行)　プログラミングの重要性 2
- 元々は TEX の描画ファイル作成を目的として開発

  ketcindy home から自由にダウンロードできる
- 現行の Cindy には KeTCindy の Java ライブラリ KetCindyPlugin.jar が最初から組み込まれている

  ・ソースは約 540 行　　プログラミングの重要性 3
- この jar の中で Maxima,R,GCC,WolframEngine などの外部プログラムを KeTCindy から実行する Java 関数が定義されている

KeTCindy と mnr 法

ファイルの準備

(1) KeTCindy の 1 つのファイルをフォルダに入れる

- ファイル名を例えば sample(.cdy) と変更

(2) sample の ketlib に Readymnr(1,1,1)[1] を書いて実行

- 画面に実行ボタン $\boxed{1}$,$\boxed{2}$,$\cdots$ ができる
- sampleketlib.txt => Ketlib スロットにコピー
- samplefigures.txt => Figures スロットにコピー
- samplemkcmd.txt にスクリプトを記述

- $\Rightarrow$ 動画：samplecdy.mov

[1] mnr 法のために ketcindy に追加　プログラミングの重要性 4

基本例 (三角形の内心公式)

- $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \dfrac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}$

$$\overrightarrow{BI} = s\left(\frac{\overrightarrow{BC}}{a} + \frac{\overrightarrow{BA}}{c}\right), \quad \overrightarrow{CI} = t\left(\frac{\overrightarrow{CB}}{a} + \frac{\overrightarrow{CA}}{b}\right), \quad \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BI}, \quad \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$$

これらの式を用いて，$\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ だけの式にすれば,

$$\left(1 - \frac{s}{a} - \frac{t}{a} - \frac{t}{b}\right)\overrightarrow{BC} + \left(\frac{t}{b} - \frac{s}{c}\right)\overrightarrow{BA} = \mathbf{0}$$

$\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ は一次独立だからそれらの係数 $= 0$ より,

$$t = \frac{ab}{a+b+c}, \quad s = \frac{ac}{a+b+c}$$

となるから，これらを $\overrightarrow{BI} = s\left(\dfrac{\overrightarrow{BC}}{a} + \dfrac{\overrightarrow{BA}}{c}\right)$ に代入する．また，任意の基準点を O とすれば,

$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ などを用いて整理すれば次の式が得られる．

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$$

Geminiに質問

- 三角形の内心の座標を３頂点から求める公式はどのように導出するのですか

  https://s-takato.github.io/specialclass/25jssac0826/GoogleGemininaisin2.html

- Geminiは正しい答えを返す

cdy ファイル (figures スロット)

```
10 mkcmd1();
11 if(contains(Ch,1),
12  Setmnrstep(1);
13  CalcbyMset(var1,"mxans1",cmdL1,op(5));
14  Disptex(Pos,Dy,1,var1);
15  m=tanhalf(50); n=tanhalf(65); r=1.5;
16  Parsevv("A::B::C::P::r");
17  dispfig1();
18 );
```

10 mkcmd.txt に書かれた cmdL1 などを読み込む

13 cmdL1 を実行して結果を var1 に代入*

14 var1 の値を画面に表示*

16 A などの値を評価して A などに割り当てる*

17 図を描く

* プログラミングの重要性 5

mkcmd.txt (実行スクリプト)

```
mkcmd1():=(
  cmdL1=concat(Mxbatch("mnr"),[
  "putT(m,n,r)",
  "A:vtxT; B:vtxL; C:vtxR",
  "a:edgB; b:edgR; c:edgL",
  "P:frfactor(a*A+b*B+c*C)",
  "end"
  ]);
);
var1="A::B::C::P";
dispfig1():=(
   Listplot("1",[A,B,C,A]);
   Circledata("1",[P,r]);
   Pointdata("1",[P],["Size=4"]);
);
```

mnr.max を batch で読み込む

内心を原点とする三角形をおく

頂点と辺に名前をつける

分数 a*A+b*B+c*C を簡単化

返す変数のリスト

描画のコマンド

プログラミングの重要性 6

デモ (内心公式)

- naisin.cdy(+naisinmkcmd.txt)

  (1) 原点が内心の場合

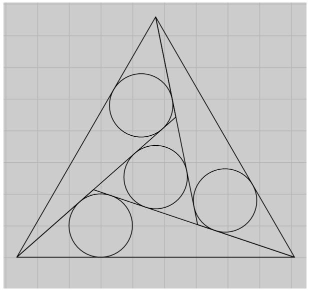
  ＋ TeX 出力

  (2) 一般の場合

  ＋ ketcindy で動的にもできる

見渡神社算額の解法

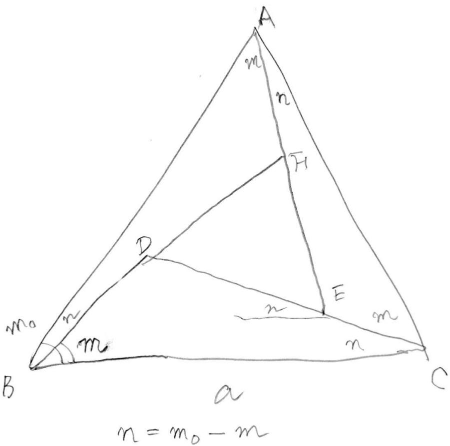
Geminiに質問



- 「図の正三角形の一辺を a とする．中にある４つの円の半径が等しいとき，中にある正三角形の一辺の長さを a で表せ」という問題の解答を教えてください

https://s-takato.github.io/specialclass/25jssac0826/GoogleGeminimiwatari.html

ラフ図とスクリプト (Maxima)




```
mkcmd2():=(
 cmdL2=concat(cmdL1,[
 "putT(m0,m0,r)",
 "slideT(vtxR,E)",
 "rotateT(-minusA(m0,m),E)",
 "I0:inC; edg:edgB",
 "eq:numer(vtxL[1]-D[1])",
 "sol:solve(eq,m)",
 "end"
 ]);
);
var2="eq::sol";
```

有理化の威力

(1) 分母分子を $m0^2 - 1/3$ で割
たときの余りを求める

(2) 分母分子とも m0 の高々 1 次
になる

(3) 分母を有理化する

デモ

プログラミングの重要性 7

```
mkcmd3():=(
 cmdL3=concat(cmdL2,[
 "eqr:ratden(eq,m0,1/3)",
 "eqm:nthfactor(eqr,1)",
 "eqm:nthfactor(eqm,2)",
 "sol:solve(eqm,m)",
 "m:frev(m,sol[2])",
 "I0:frev(I0,sol[2])",
 "I0:ratden(I0,m0,1/3)",
 "eb0:frev(edg,sol[2])",
 "rat1:frf(edg/eb1)",
 "rat2:frev(rat1,
   [m0=1/sqrt(3),m=1/sqrt(7)])",
 "end"
 ]);
);
```

結論

(1) mnr 法は平面図形問題を数式処理で厳密に解くために有力な方法

(2) ただし解法ツールとして多くのプログラム作成が必要

(3) そのためのプログラミング力がキーになる

(4) 「有理化」のように，問題に特化した工夫が必要な場合もある

(5) そのような工夫を考え出すことも mnr 解法の醍醐味

補足：Geogebraとの違い

Geminiに質問してみた

- Geogebraで図形の問題を厳密に解くことはできますか
- Geogebraの数式処理機能で少し長いプログラムを書くことはできますか

https://s-takato.github.io/specialclass/25jssac0826/GoogleGeminigeogebrazukei.html

KeTCindyとMaximaによるmnr解法はGeogebraとは全く違う図形問題へのアプローチである