Maxima による和算の図形問題の解法と授業方法についての提案

KeTCindy センター・日本数学教育学会名誉会員　髙遠 節夫[1]

1 はじめに

和算の幾何問題は，図形としても美しく，数学の授業でもしばしば自由研究などの題材とされるが，実際に解くにはかなりの計算力を要するため，学習者にとっては受動的になってしまうことも少なくない．そこで，学習者自らが，(1) 題意から連立方程式を作り，(2) オープンソースの数式処理システム Maxima を用いて解くことを考えた．しかし，解析幾何の基本的な手法だけでは，方程式が長大あるいは無理式を含む式になり，Maxima では解くことができない．例えば，三角形の内心公式について，点と直線の距離だけから求めようとすると，以下のスクリプトを Maxima で実行することになる[2].

```
tmp1:((y2-y1)*x-(x2-x1)*y-(y2-y1)*x1+(x2-x1)*y1)^2;
tmp2:(y2-y1)^2+(x2-x1)^2;
tmp3:((y3-y1)*x-(x3-x1)*y-(y3-y1)*x1+(x3-x1)*y1)^2;
tmp4:(y3-y1)^2+(x3-x1)^2;
tmp5:((y3-y2)*x-(x3-x2)*y-(y3-y2)*x2+(x3-x2)*y2)^2;
tmp6:(y3-y2)^2+(x3-x2)^2;
eq1:factor(tmp1*tmp4-tmp2*tmp3);
eq2:factor(tmp1*tmp6-tmp5*tmp2);
sol:algsys([eq3,eq4],[x,y]);
```

しかし，eq1,eq2 はいずれも長大になり[3]，algsys で解を得ることができない．

```
eq1=-((x2*y3-x1*y3-x3*y2+x1*y2+x3*y1-x2*y1)*
     (2*x1*y1*y2*y3-2*x*y1*y2*y3-2*x1*y*y2*y3+2*x*y*y2*y3-...
```

そこで，三角形 ABC の内接円の半径を r とし，底角 B, C について $m = \tan\frac{B}{2}, n = \tan\frac{C}{2}$ とおいて，三角形の諸量を m, n, r の有理式で表すことにした．この場合，三角関数については，加法定理より

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\\ &= 2\frac{1}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}} - 1 = \frac{1-m^2}{1+m^2}\end{aligned}$$

などを用いれば，三角形の諸量は m, n, r の有理式で表される．著者は，これを MNR 法と呼んでいる[4].

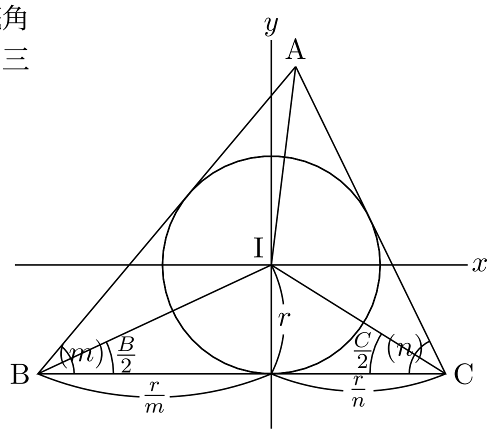


図 1: MNR 法

[1]E-mail: setsuotakato@gmail.com
[2]各式の根号を外すために 2 乗している．
[3]因数分解して求められる第 2 因数の文字数は 600 を超える．
[4][1] では半角の余接をとることで，例えば底辺がそれらの和で表されることを用いている．

次節以降では，MNR 法ライブラリの作成，KETCindy による実行，及び MNR 法による問題解法の実践例を述べる．

2　MNR 法ライブラリの作成

MNR 法によれば，底辺の両側の頂点 B, C の座標は次のようになる．

$$\mathrm{B}(-\frac{r}{m},\ -r),\ \mathrm{C}(\frac{r}{n},\ -r)$$

また，頂角 A については，次のようになる[5]．

$$\tan\frac{A}{2}=\tan\frac{\pi-B-C}{2}=\cot\frac{B+C}{2}=\frac{1-mn}{m+n}$$

なお，MNR 法では半角の正接が重要となる．そこで，α $(-\pi<\alpha<\pi)$ について

$$\tan\frac{\alpha}{2}=t$$

となる α を (t) と表すことにする．この記法によれば $A=\left(\frac{1-mn}{m+n}\right)$ であり，頂点 A の座標及び各辺の長さは以下のようになる．

$$\mathrm{A}\left(\frac{r(n-m)}{1-mn},\frac{1+mn}{1-mn}\right)$$

$$\mathrm{BC}=\frac{r}{m}+\frac{r}{n},\ \mathrm{AB}=\frac{r(1+m^2)}{m(1-mn)},\ \mathrm{AC}=\frac{r(1+n^2)}{n(1-mn)}$$

MNR 法では，最初に関数 `putTriangle(m,n,r)` (省略形 putT) によって，角 B, C がそれぞれ (m), (n) で内心が原点である三角形 ABC と内接円をおく．putT を実行すると，頂点，辺の長さ，５心などが次の大域変数に代入される．

種類	変数名	省略形
頂点	vertexTop,vertexLeft,vertexRight	vtxT,vtxL,vtxR
頂角	angleT	angT
辺	edgeBottom,edgeLeft,edgeRight	edgB,edgL,edgR
内心外心	inCenter,inR,cirCenter,cirR	inC,inR,cirC,cirR
垂心重心	ortCenter,baryCenter	ortC,barC
傍心傍接円	exCa,exRa,exCb,exRb,exCc,exRc	
面積 S,s	area,halfPer	

さらに，最初に putT でとった三角形を問題に合った位置に移動することが一般的であり，そのために，次のコマンドを組み込んでいる．

slideTriangle(pt1,pt2) (省略形 slideT)	pt1 が pt2 に一致するように平行移動
rotateTriangle(m,pt) (省略形 rotateT)	pt を中心に (m) だけ回転

ここで，rotateT では，回転角を (m) で表すことが重要である[6]．

[5]通常は底辺を下側にとるが，その場合は $1-mn>0$ となる．
[6]θ 回転は $\cos\theta$ と $\sin\theta$ すなわち m で表されるからである．

$\alpha=(t)$ の補角 $\pi-\alpha$ は $\tan\frac{\pi-\alpha}{2}=\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{t}$ より $(\frac{1}{t})$ と表される．同様に．余角 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ は $\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})=\frac{1-t}{1+t}$ となる．これらのことを用いて，補角及び余角を求める関数を

$$\mathrm{supA(t)} := 1/t, \quad \mathrm{comA(t)} := (1-t)/(1+t)$$

と定義した．加えて，角の和と差も組み込んだ．

$$\mathrm{plusA(t1,t2)} := \mathrm{ratsimp}((t1+t2)/(1-t1*t2)$$

$$\mathrm{minusA(t1,t2)} := \mathrm{ratsimp}(t1-t2)/(1+t1*t2))$$

Maxima の MNR ライブラリ `mnr.max` には，加えて以下の汎用関数が定義されている．

numer(f)	方程式 (=0) の分子を因数分解 :=factor(num(ratsimp(f)))
denom(f)	方程式 (=0) の分母を因数分解 :=factor(num(ratsimp(f)))
frev(eq,rep)	eq に rep を代入して分数式を簡単化
frevL(eqL,rep)	eqL に rep を代入して分数式リストを簡単化
frfactor(eq,rep)	eq に rep を代入した分数式を因数分解して簡単化
frfactorL(eqL,rep)	eqL に rep を代入した分数式リストを因数分解して簡単化
ratden(s,x,a)	s の分母を有理化して簡単化
nthfactor(pol,k)	多項式の k 番目の因子を返す[8]
timesA(nn,m)	(m) を nn 倍した角 (MNR 法表現)
dotProd(v1,v2)	内積
crossProd(v1,v2)	外積
lenSeg2(p1,[p2])	p1 [p2-p1] の長さの平方
meetLine(pts1,pts2)	2 線分の交点 (pts は 2 点のリスト)
edge(A,B)	辺 AB(frfactor で簡単化)
edg2m(c,a,b)	三角形 ABC において，頂点 C の m の値
cos2m(c)	cos の値が c である角の m の値
reduceD(pL,z,stp)	2 つの連立方程式から z を消去
comTan1(C1,r1,C2,r2)	2 円の共通外接線 1
comTan2(C1,r1,C2,r2)	2 円の共通外接線 2
comTanC1(C1,r1,C2,r2)	2 円の共通内接線 1
comTanC2(C1,r1,C2,r2)	2 円の共通内接線 2
contCL(C,r,P1,P2)	円 C,r が直線 P1P2 に接する条件
contCL(C,r,P1,P2)	円 C,r が直線 P1P2 に接する条件
qua(expr,m,M)	expr の m を 4 分角 M で表す
quaL(exL,m,M)	リスト exL の m を 4 分角 M で表す

3 KETCindy による実行

KETCindy は著者らが開発している TEX の描画ファイル作成のためのパッケージ ([3]) で，実体は動的幾何システム Cinderella2([8]) の関数ライブラリである．Cinderella2 には

[8] 望む結果にならない場合もある．

最初からKETCindyのjavaプログラム集`ketcindyplugin.jar`が内包されており，その中のコマンド`kc`によって，R, Maxima, GCCなどの外部プログラムをKETCindyから実行して，結果を利用できるようになっている．このうち，RはTEXの描画コードであるTpic, pict2e, TikZのコードを生成し，MaximaとGCCはそれぞれ数式処理と曲面描画の高速化のために用いられる．KETCindyは，「KeTCindyのインストール」([6])の手順に従ってインストールすればよい[9].

KETCindyとMaximaを用いて，図形問題をMNR法で解く手順は以下の通りである．

(1) KETCindyのサンプルファイルの１つ，例えば`00start.cdy`を適当な名前に変えて作業フォルダに入れる．ここでは`00startmnr.cdy`としておく．Cinderellaは通常の画面の他にプログラムコードを入力するCindyScript画面がある．これは使用目的と方法によって異なる項目(スロット)に分かれていて，KETCindyではDrawスロットのfigures，InitializationのKETlibを用いている[10].

(2) `00startmnr.cdy`を開き，KETlibの最後に以下のスクリプトを記述して実行する．

```
Readmnr(1,1,1)
```

すると，画面上に実行ボタン$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, ... が作成表示されて，作業フォルダ内にテキストファイル`00startmnrfigures.txt`, `00startmnrketlib.txt`が作成されるので，それらを各スロットにコピーする．

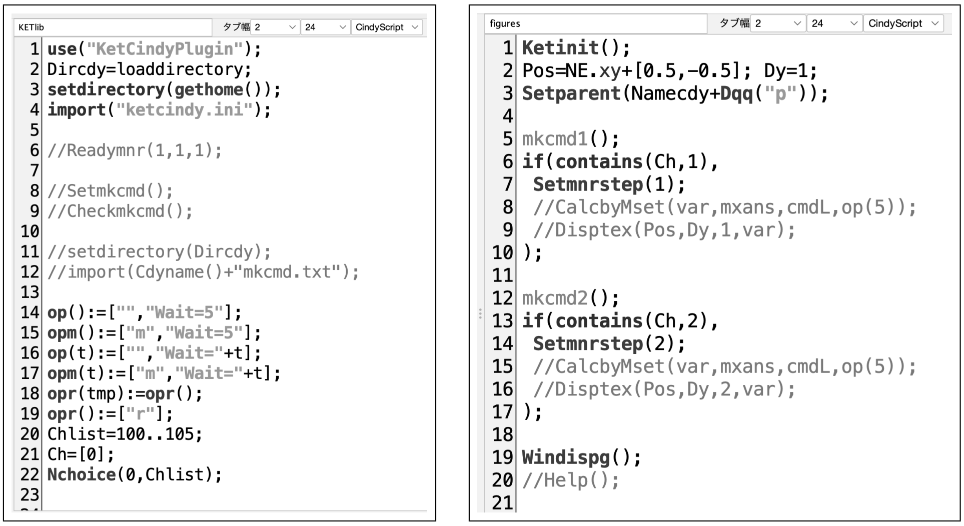


図 2: 00startmnr.cdy の ketlib と figures

(3) `00startmnrmkcmd.txt`はMNR法スクリプトの骨格ファイルである．問題に従ってこのファイルを完成させて，KETlibスロットの11,12行の//(コメントアウト)とfiguresスロットの8,9行などの//を外して実行すれば，画面に結果が表示される．

(4) 主なコマンドについて説明しておく．左側の11,12行はcdyファイルの名前00startmnrにmkcmdを追加したファイルを読み込んで実行するものである．そうすると右側の

[9]予め TeXLive または KeTTeX，Maxima をインストールする．TEX を使う場合は R も必要である．

[10]前者は状態変化があると常に実施され，後者はプレイボタンが押されるときに１度だけ実行される．

5,12 行にあるコマンド mkcmd が有効になり，Maxima のコマンド列 cmdL と変数列 var が定義される．ここで var は"eq1::eq2"のように，変数名が:: で区切られた文字列である．8,15 行の CalcbyMset は，コマンドを実行して結果を var の各変数に代入するコマンドである．ここで，mxans は計算結果の文字式のリストからなる変数であり，7 行の Setmnrstep を実行することによって var, mxans, cmdL の値が番号がついた文字列"var1", "mxans1", "cmdL1"などと定められる．9 行の Disptex は各変数に代入された文字列を TEX 書式に変換して画面に表示するコマンドである．

4 MNR 法による解法例

授業等で，学習者に MNR 法で和算の図形問題を解くことを試みさせるとき，最初は，「円周角の定理」や「角の二等分線の定理」など簡単な例題を取り上げて，説明しながら一緒に解くことにより，MNR 法の理解を深めるであろう．本節では，そのような例題 (以下の例 1, 例 2) から始めて，その後に実際の和算の問題 (例 3) に進むことにする．

例 1 円周角の定理 (直径の場合) circularangle.cdy

MNR 法では変数が多くなるので， 図 3 のようなラフ図を描いて考えた方がよい．

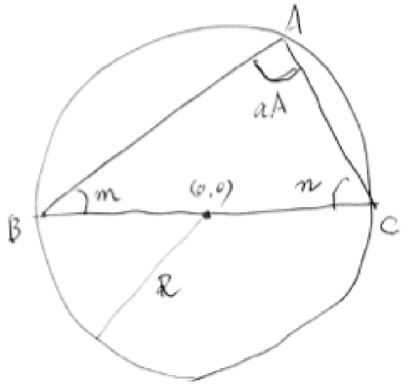


図 3: 直径上の円周角 (ラフ図)

1. Readmnr を実行してできる*mkcmd.txt に以下のスクリプトを書く (*はファイル名).

```
mkcmd1():=(
 cmdL1=concat(Mxbatch("mnr"),[
  "putT(m,n,r)",
  "eq:vtxL[2]-cirC[2]",
  "sol:solve(eq,m)",
  "fe:frevL([vtxT,vtxL,vtxR,cirC,cirR,angT],sol[1])",
  "A:fe[1]; B:fe[2]; C:fe[3]; O:fe[4]; R:fe[5]; aA:fe[6]",
  "end"
 ]);
 var1="sol::A::B::C::O::R::aA";
 Pos=NE.xy+[0.5,-0.5]; Dy=1;
);
Dispfig1(r,n):=(
  Setwindow([-5,5],[-5.5,3]);
  Parsevv(var1);
  Listplot("1",[A,B,C,A]);
  Circledata("1",[O,R]);
  Letter([A,"n","A",B,"w","B",C,"e","C"]);
);
```

(2 行) ketcindy にある mnr.max を Maxima の batch で読み込む.

(3 行) 内心を原点として三角形 ABC をおく．

(4,5 行) 内心と B(vtxL) の y 座標を等しいとする m の方程式を解く．

(6,7 行) 変数リスト vtxT, vtxL, ... に解 1 を代入して A, B, ... の値を求める[11]．

(8 行) `end` は途中式では常にコンマを入れるように最初から書かれている．

(10 行) 返される変数リスト (文字列として :: で区切る)

(11 行) 画面上の書き出し開始位置と行間

(13 行-) 画面に描く図の指定

注． 1, 2, 8, 10, 11 行などは骨格ファイルに最初から書かれている．

2. cdy ファイルを開き，図 2 の左側 (ketlib) の 11, 12 行の//を外す．この場合，`*mkcmd.txt` を修正するごとに Figures に戻って実行ボタンを押す必要がある．これらを右側 (figures) の 4 行あたりに移動すると，スクリプトを変更して画面のボタンをクリックするだけで自動的に実行される．ただし，2 行の後にディレクトリを変更するコマンド `setdirectory(Dirwork);` を追加しておく．

3. 図 2 の右側 (figures) の 8, 9 行の//を外して，`Dispfig1(r,n)`[12]を追加する．

4. 画面の $\boxed{1}$ のボタンをクリックすると，Maxima が実行されて，1 秒足らずで結果が画面に表示される．aA の値が 1 であることから，$\angle A = (1) = \frac{\pi}{2}$ が得られる．

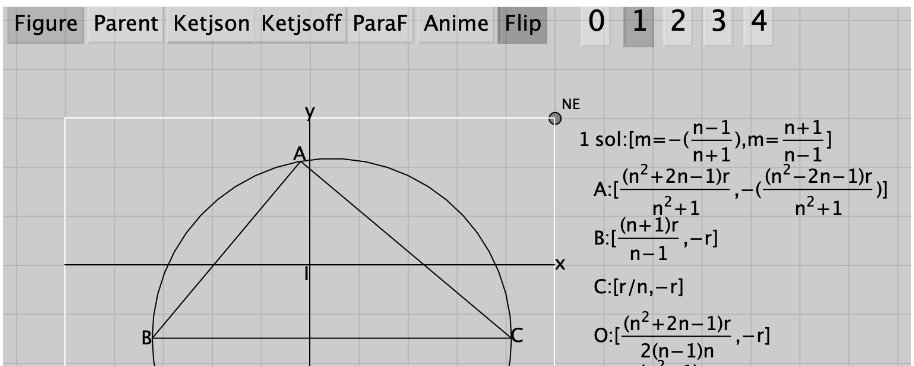


図 4: cdy ファイルの実行結果

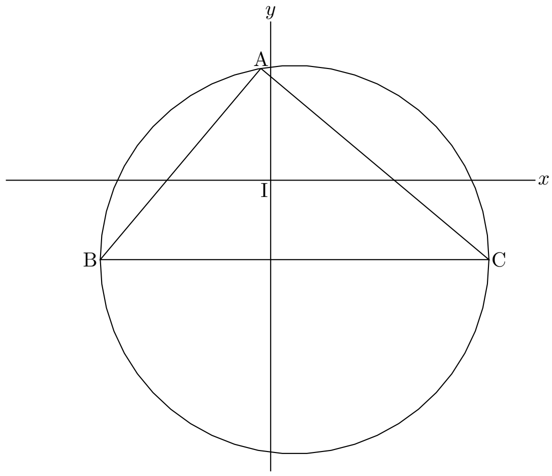
注 1 図 4の右側の数式は KETCindy の関数 `Totexform` を用いている．これは，著者らが定めた 1 次元数式ルール KeTMath 数式で書かれた文字列を TEX 書式に変換するものである ([9], [10], [11])．

注 2 KETCindy をフルインストール[13]していれば，図 4の左上にあるボタン $\boxed{\text{Figure}}$ を押すことにより図と数式の入った TEX ファイルが作成される (図 5)．

[11] 解は 2 個あるが，どちらでもよい．

[12] r,n には，例えば 1.5, tanhalf(40)(40° の半角の正接) を代入する．

[13] [3] から ketcindy をダウンロードしておく．TeXLive または TeXLive のサブセット KeTTeX, Maxima, R をインストールして ketcindysettings.cdy を実行する．



$$1\ \ sol:[m=-(\frac{n-1}{n+1}),m=\frac{n+1}{n-1}]$$

$$A:[\frac{(n^2+2n-1)r}{n^2+1},-(\frac{(n^2-2n-1)r}{n^2+1})]$$

$$B:[\frac{(n+1)r}{n-1},-r]$$

$$C:[r/n,-r]$$

$$O:[\frac{(n^2+2n-1)r}{2(n-1)n},-r]$$

$$R:-(\frac{(n^2+1)r}{2(n-1)n})$$

$$aA:1$$

図 5: TEX ファイルの作成

例 2 角の二等分線

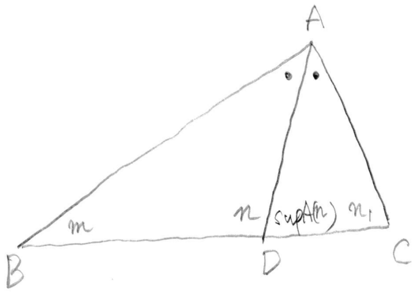


図 6: 角の二等分線 (ラフ図)

```
mkcmd1():=(
 cmdL1=concat(Mxbatch("mnr"),[
 "D:[0,0]",
 "putT(m,n,r); slideT(vtxR,D)", //*1
 "B:vtxL; A:vtxT; aA:angT",
 "AB:edgL; BD:edgB;",
 "putT(supA(n),n1,r1); slideT(vtxL,D)", //*2
 "C:vtxR; A1:vtxT; AC:edgR; DC:edgB; aA1:angT",
 "eq1:numer(A[2]-A1[2])", //*3
 "eq2:numer(aA-aA1)", //*4
 "sol:solve([eq1,eq2],[n1,r1])",
 "fe:frevL([A,C,AC,DC,n,r2],sol)",
 "A:fe[1]; C:fe[2]; AC:fe[3]; DC:fe[4]; n:fe[5]; r2:fe[6]",
 "ABdAC:frfactor(AB/AC); BDdDC:frfactor(BD/DC)",
 "end"
 ]);
 var1="eq1::eq2::sol::A::B::C::D::AB::AC::BD::DC::ABdAC::BDdDC";
 var1d="eq1::eq2::sol::AB::AC::BD::DC::ABdAC::BDdDC"; //*5
);
```

*1 D を原点として左の三角形 ABD をおく.

*2 頂点をとりあえず A1 として右の三角形 A1DC をおく.

*3 A と A1 が一致する条件

*4 角 aA(BAD) と角 aA1(DAC) が等しい条件

*5 画面に表示する数式

Maxima で計算すると，次の結果，すなわち $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}$ が得られる．

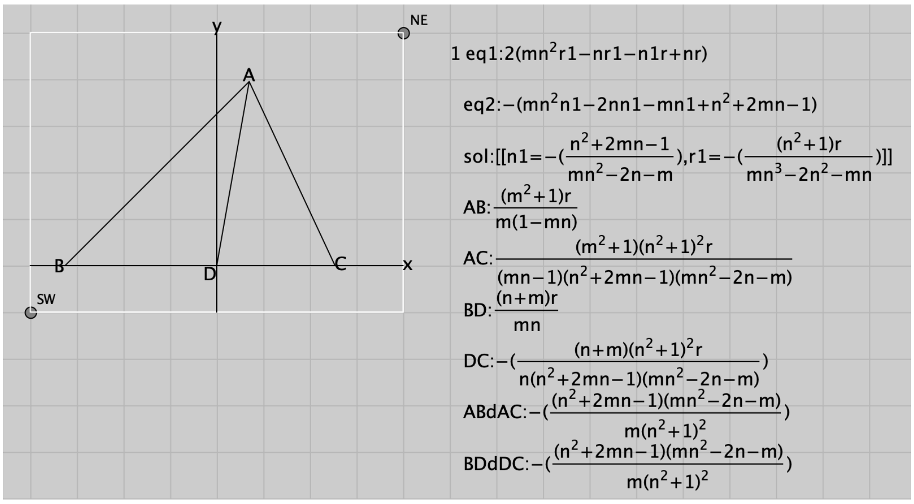


図 7: 角の二等分線の定理

例 3 中尊寺地蔵院算額の問題 (牧下英世 [7][14])

問 図のように，正方形の中に正三角形と甲乙の 2 円を入れる．その円径差を与えたとき，正方形の辺の長さはいくらか．

答 術文の通りである．

術 48 の平方根に 7 を加えて円径差を掛けると辺の長さを得る．

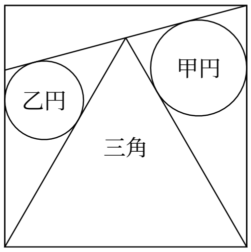


図 8: 地蔵院の算額

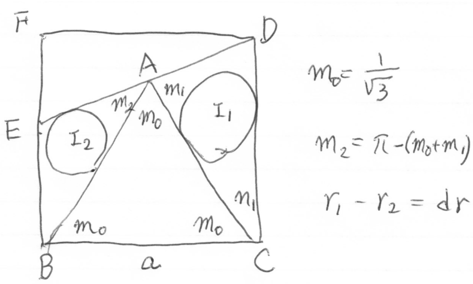


図 9: 地蔵院 (ラフ図)

```
mkcmd1():=(
 cmdL1=concat(Mxbatch("mnr"),[
// "m0:1/sqrt(3)",//*1
 "putT(m0,m0,r0)",
 "eq:edgB-a; sola:solve(eq,r0)",//*2
 "fe:frevL([vtxT,vtxL,vtxR],sola)",
 "A:fe[1]; B:fe[2]; C:fe[3]",
 "n1:comA(m0)",//*3
 "putT(m1,n1,r1); slideT(vtxR,C); rotateT(-m0,C)",//*4
 "D:vtxT; I1:inC",
 "eq1:numer(edgB-a); eq2:numer(edgR-a)",
 "sol:algsys([eq1,eq2],[r1,m1])",//*5
 "fe:frevL([r1,m1,D,I1],sol)",
 "r1:fe[1]; m1:fe[2]; D:fe[3]; I1:fe[4]",
 "tmp:plusA(m0,m1)",
```

[14] 牧下は「地蔵院の問題は解けそうで解けない手強い問題が揃っている」と述べている．

```
 "putT(n1,supA(tmp),r2)",
 "slideT(vtxL,B); rotateT(m0,B)",//*6
 "eq:numer(edgB-a); sol:solve(eq,r2)",
 "fe:frevL([vtxT,inC,r2],sol)",
 "E:fe[1]; I2:fe[2]; r2:fe[3]",//*7
 "ans1:frfactor(a/(2*(r1-r2)))",/*8
 "ans2:ratden(ans1,m0,1/3)",
 "F:[E[1],D[2]]",
 "end"
 ]);
 var1="A::B::C::D::dr::E::F::I1::r1::I2::r2::ans1::ans2";
 var1d="r1::r2::ans1::ans2";
);
```

*1 正三角形の内角 $= (\frac{1}{\sqrt{3}})$

*2 正方形の一辺を a とおく

*3 (m0) の余角を m1 とおく

*4 三角形 DAC を C を中心に (−m0) だけ回転する

*5 AC=DC=a より r1,m1 を求める

*6 2 底角が (n1) および (m0+m1) の余角である三角形 EBA をおき，B を中心に (m0) だけ回転する

*7 底辺 BA が a であることから E,I2,r2 を求める

*8 a と 2r1 − 2r2 の比 ans1 が求める解である

しかし，ans1 は確かに解ではあるが，長大な式で算額の解とは異なっている．そこで，Maxima の関数 `remainder` を用いて分母を有理化する関数 `ratden(s,x,a)` を `mnr.max` に追加した[15]．これにより計算した結果が ans2 で，算額の解と一致する．

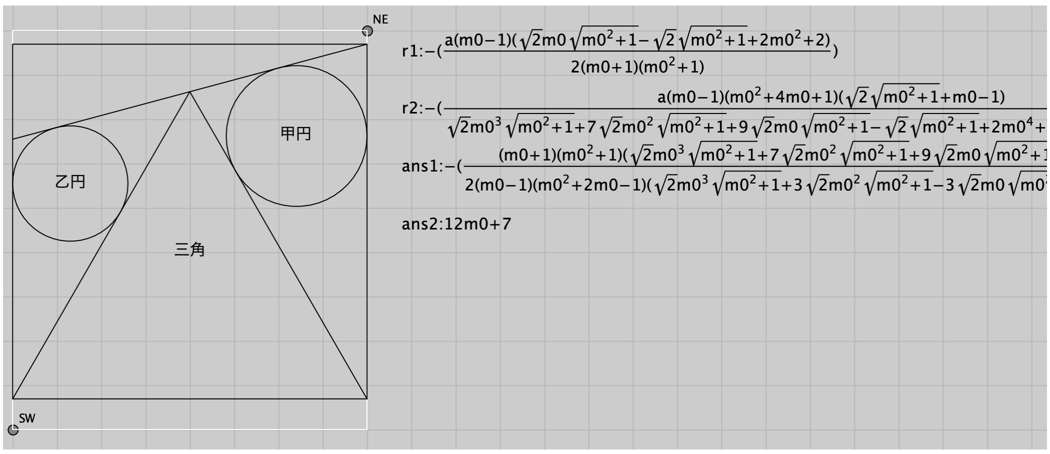


図 10: 中尊寺地蔵院の解

[15] s の分母分子を $x^2 - a$ で割った余りを用いる．商の部分は $x^2 - a = 0$ より 0 である．

5　まとめと今後の課題

MNR 法により，和算の図形問題，特に三角形についての多くの問題が Maxima を用いて解くことができる．また，KETCindy と組み合わせることで，途中の図と式を表示しながら，対話的に解法を進めることが可能になる．MNR 法では変数の数が多くなるので，変数名を書き込んだラフ図を描いて，それを見ながらスクリプトを記述していく方法が効率的である．実際の和算の問題では，何らかの工夫を要することも多い．例えば，図 11 の `ans1` の分子分母を $m0^2-1/3$ で割った余り `ans1n`，`ans1d` は，m0 の 1 次式で[16]

$$ans1n = -((m0(32^{15/2}\sqrt{m0^2+1}-64)+52^{11/2}\sqrt{m0^2+1}+64)/27)$$

$$ans1d = -((m0(32^{17/2}\sqrt{m0^2+1}-1216)-132^{11/2}\sqrt{m0^2+1}+704)/27)$$

これらからできる分数の分母を有理化したものが `ans2` であり，`ratden` は，この手続きを実行する関数として後から追加されたものである．このような工夫を必要とする点は，むしろ「問題を解く」という学習者の意欲を向上させるものと期待される．

参考文献

[1] 岩田至康編, 幾何学大辞典, 槇書店, 1971

[2] 深川英俊, ダン・ペドー , 日本の幾何—何題解けますか, 1991

[3] KeTCindy Home `https://s-takato.github.io/ketcindyorg/indexj.html`

[4] KeTCindy ダウンロードページ `https://github.com/ketpic/ketcindy`

[5] Cinderella ダウンロードページ `https://beta.cinderella.de.html`

[6] KeTCindy のインストール `https://s-takato.github.io/ketcindyorg/installketcindy.html`

[7] 牧下英世, 数学史を取り入れた授業実践—算額の教材化と総合的な学習—, 筑波大学附属駒場論集 40 集, 145-171, 2000

[8] Richter-Gebert, Jürgen and Kortenkamp, Ulrich H., The Cinderella.2 Manual – Working with the Interactive Geometry Software, Springer, 2012

[9] 高遠節夫, 濱口直樹, Web 利用の理数教育に役立つ数式送受システムの開発, 数理解析研究所講究録 2178, 67-76, 2021

[10] 高遠節夫, 濱口直樹, 北本卓也, KeTMath による課題送受・採点処理・結果分析の送受と授業実践, 数理解析研究所講究録 2236, 90-99, 2022

[11] 高遠節夫, 濱口直樹, 北本卓也, 1 次元表現ルールに基づいた数式の送受と授業実践 , 城西大学数学科数学教育紀要 4, 23-34, 2022

[12] S. Takato, H. Makishita, A Method to Prove Japanese Theorems and Others Appeared in Wasan Using Maxima, SCSS 2024, LNAI 14991, 57-78, 2024

[16] $\sqrt{m0^2+1}$ は m0 とは異なる変数として扱われる．