日本定理１についての注意 北原（2024 年 03 月 29 日）

$$r3a = \frac{nr_1(-n+m+mnn_1+n_1)}{mn_1(n^2+1)}, \qquad r3b = \frac{nr_1(nn_1^2-mn_1^2+2mnn_1-m^2n_1+n_1+m^2n+m)}{mn_1(1-mn_1)(n^2+1)}$$

$$r3b - r3a = \frac{n(n_1^2+1)(1+m^2)}{mn_1(1-mn_1)(n^2+1)}$$

だから $r3b > r3a$．$r3a$ から $m1$ を解いたものを $m1a$，$r3b$ から $m1$ を解いたものを $m1b$ とすると，

$$m1a = \frac{-n+m+mnn_1+n_1}{1-mn_1+nn_1+mn}, \qquad m1b = -\frac{1}{m1a}$$

最後に $r3a$(と $m1a$) の分子の一部 $= -n+m+mnn_1+n_1 > 0$ は自明ではないので一応証明しておくと（北原流）

$$\begin{aligned} -n+m+mnn_1+n_1 &= m+n_1-n(1-mn_1) = (1-mn_1)\left(\frac{m+n_1}{1-mn_1}-n\right) \\ &= (1-mn_1)\left(\cot(\angle BDA/2)-n\right) \end{aligned}$$

ところが,

$$\tan(\angle BDA/2) < \tan(\angle CDA/2) = \frac{1}{n}$$

だから $\cot(\angle BDA/2)-n>0$ である．